หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

คณิตศาสตร์ ๔
เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๑ พ.ศ. ๒๕๖๓

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหนังสือเรียนฉบับ e-book นี้ขึ้น โดยมีเนื้อหาเช่นเดียวกับหนังสือเรียน สสวท. ฉบับสื่อสิ่งพิมพ์ที่ได้จัดทำตามมาตรฐานหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ทุกประการ เพื่ออำนวยความสะดวกในการเข้าถึงหนังสือเรียน สสวท. ผ่านเทคโนโลยีดิจิทัลเพื่อให้นักเรียน ครู ผู้ปกครอง นักวิชาการ และ ผู้สนใจทั่วไปเข้าถึงได้ง่ายและสะดวกรวดเร็ว รวมทั้งสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับจุดประสงค์ต่างๆ ทั้งนี้ สสวท. ขอสงวนสิทธิ์ในหนังสือเรียนฉบับ e-book นี้ตามกฎหมายลิขสิทธิ์ ห้ามผู้ใดทำซ้ำ คัดลอก ดัดแปลง เลียนแบบ จำหน่าย หรือ เผยแพร่โดยมิได้รับอนุญาต

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๒ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และเรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชนจึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ภาคเรียนที่ ๒ **เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง กราฟของฟังก์ชัน การดำเนินการของฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เลขยกกำลัง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม การหาค่าลอการิทึม การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม สมการและอสมการลอการิทึม การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

เรขาคณิตวิเคราะห์ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน
๒. ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
๓. เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๔. แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๕. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

รวมทั้งหมด ๕ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“
.....
.....
”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

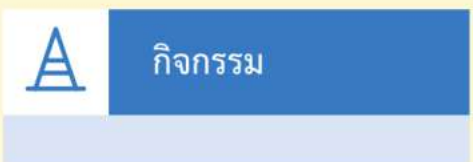
ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเองเพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

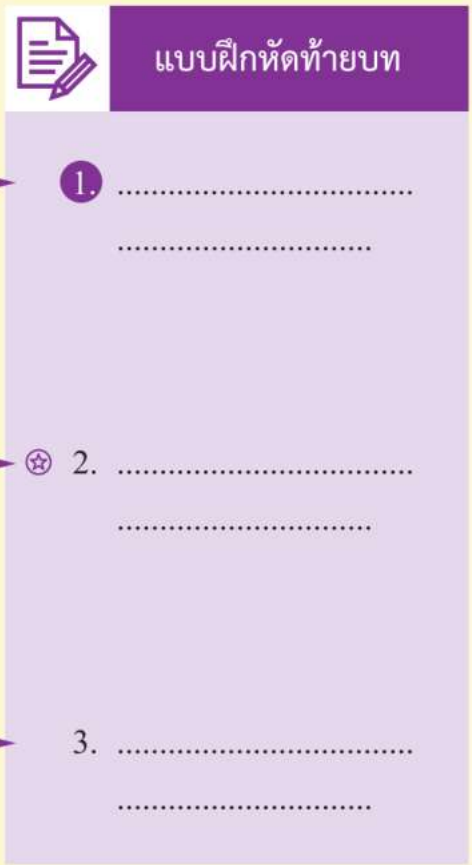
แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ



บทที่ 1 จะใช้สี

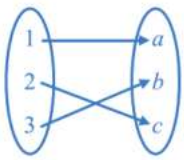
บทที่ 2 จะใช้สี

บทที่ 3 จะใช้สี

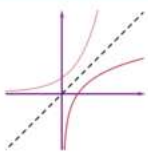
สารบัญ

บทที่ 1 – 2

บทที่	เนื้อหา	หน้า
1	**บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน**	**1**
	1.1 ความสัมพันธ์	3
	1.2 ฟังก์ชัน	16
	1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง	39
	1.4 กราฟของฟังก์ชัน	53
	1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน	67
	1.6 ฟังก์ชันผกผัน	80
2	**บทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม**	**99**
	2.1 เลขยกกำลัง	101
	2.1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม	101
	2.1.2 รากที่สองในระบบจำนวนจริง รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์	104
	2.1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	116
	2.2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	130
	2.3 ฟังก์ชันลอการิทึม	149
	2.4 การหาค่าลอการิทึม	159
	2.5 การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม	162
	2.6 สมการและอสมการลอการิทึม	166
	2.7 การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	174



ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

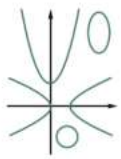


ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

สารบัญ

บทที่ 3

บทที่	เนื้อหา	หน้า
3	**บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์**	**195**
	3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	197
	3.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	197
	3.1.2 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	206
	3.1.3 ความชันของเส้นตรง	212
	3.1.4 เส้นขนาน	218
	3.1.5 เส้นตั้งฉาก	223
	3.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง	228
	3.1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด	239
	3.2 ภาคตัดกรวย	248
	3.2.1 วงกลม	251
	3.2.2 วงรี	262
	3.2.3 พาราโบลา	276
	3.2.4 ไฮเพอร์โบลา	292
	3.2.5 การเลื่อนกราฟ	308



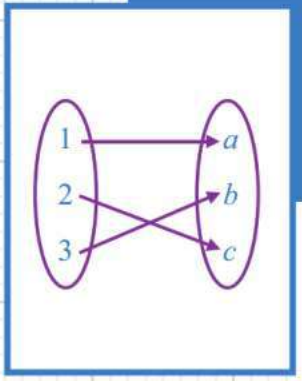
เรขาคณิตวิเคราะห์

บรรณานุกรม 334

ภาคผนวก 338

คณะผู้จัดทำ 343

บทที่ 1 | ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



1.1 ความสัมพันธ์
1.2 ฟังก์ชัน
1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง
1.4 กราฟของฟังก์ชัน
1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน
1.6 ฟังก์ชันผกผัน

จุดมุ่งหมาย

1. หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์
2. จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน
3. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน
4. ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด
5. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน
6. หาฟังก์ชันประกอบ
7. หาฟังก์ชันผกผัน
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ในชีวิตจริง นักเรียนมักพบปริมาณสองปริมาณ ที่อยู่ในรูปตัวเลขหรือสัญลักษณ์อื่น ๆ ที่มีความสัมพันธ์กัน กล่าวคือ เมื่อปริมาณหนึ่งเปลี่ยนไป อีกปริมาณจะเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย เช่น เมื่อสังเกตหน้าปัดบนตู้จ่ายน้ำมัน ณ สถานีบริการน้ำมันแห่งหนึ่ง จะพบว่าบนหน้าปัดมีตัวเลขบอกปริมาณ 3 ชนิด ได้แก่ จำนวนเงิน (บาท) จำนวน (ลิตร) และราคาลิตรละ (บาท) โดยในขณะที่เติมน้ำมัน ตัวเลขบนหน้าปัดในช่องจำนวนและจำนวนเงินจะมีการเปลี่ยนแปลงเพื่อแสดงจำนวนลิตรของน้ำมันที่เติมในขณะนั้น และจำนวนเงินที่ลูกค้าจะต้องจ่ายในการเติมน้ำมัน ซึ่งได้จากผลคูณของจำนวนลิตรและราคาต่อลิตรของน้ำมันที่เติม ความสัมพันธ์ของจำนวนลิตรและจำนวนเงินดังกล่าวเป็นตัวอย่างหนึ่งของฟังก์ชัน

ความรู้ก่อนหน้า

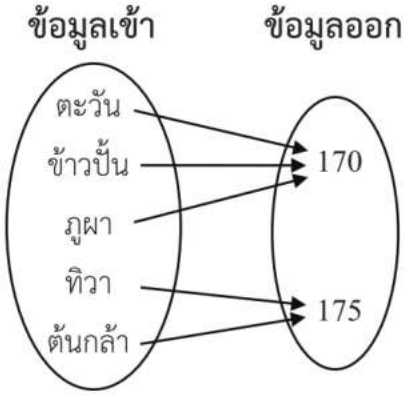
- ความรู้เกี่ยวกับสมการและกราฟในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต
- จำนวนจริง

goo.gl/Hu9Stk

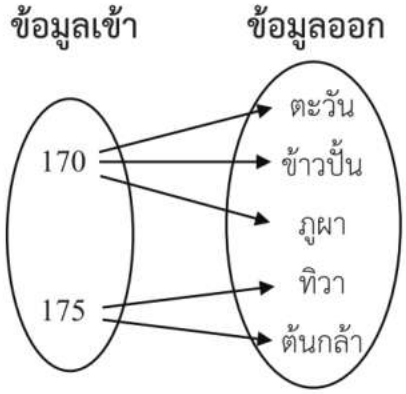
1.1 ความสัมพันธ์

ความหมายของความสัมพันธ์

เมื่อนักเรียนสอบถามความสูงของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน จากนั้นสร้างเซตของข้อมูลขึ้นมาสองเซต คือ เซตของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน และเซตของความสูงของเพื่อนทุกคนในห้องเรียน จะเห็นว่าเซตของข้อมูลทั้งสองมีความเกี่ยวข้องกัน นั่นคือ เมื่อกำหนดชื่อของเพื่อน จะทราบความสูงของเพื่อนคนนั้น เช่น



ในทางกลับกันเมื่อกำหนดความสูง จะทราบว่าใครมีความสูงตามที่กำหนดบ้าง ดังนี้



ในทางคณิตศาสตร์ การจับคู่ระหว่างสองสิ่งที่มีความสัมพันธ์กัน เขียนแทนได้ด้วยคู่อันดับ โดยแต่ละคู่อันดับจะประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง เช่น คู่อันดับ (a, b) มี a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง คู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อสมาชิกตัวหน้าเท่ากันและสมาชิกตัวหลังเท่ากัน นั่นคือ

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

เรียกเซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ a และ b มีความเกี่ยวข้องกันบางประการว่า **ความสัมพันธ์ (relation)** จากสถานการณ์ข้างต้น ความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหลังเป็นความสูงของสมาชิกตัวหน้า คือ

$$\{ (\text{ตะวัน}, 170), (\text{ข้าวปั้น}, 170), (\text{ภูผา}, 170), (\text{ทิวา}, 175), (\text{ต้นกล้า}, 175) \}$$

ในทางกลับกัน ความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหลังคือชื่อเพื่อนที่มีความสูงเป็นสมาชิกตัวหน้า คือ

$$\{ (170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูผา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า}) \}$$

บทนิยาม 1

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ (อ่านว่า เอ คูณ บี)
เขียน $A \times B$ ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B \}$$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{a, b\}$ จงหา $A \times B$ และ $B \times A$

วิธีทำ $A \times B = \{ (1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b) \}$
$B \times A = \{ (a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 5) \}$ ■

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า $A \times B \neq B \times A$

เนื่องจากความสัมพันธ์คือเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้า (จากเซต A) และสมาชิกตัวหลัง (จากเซต B) มีความเกี่ยวข้องกันบางประการ จึงอาจกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B หรือเขียนได้ว่า $r \subset A \times B$ และเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์จาก A ไป B**

บทนิยาม 2

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ถ้า $r \subset A \times A$ แล้วเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์บนเซต A**

จากบทนิยามจะเห็นว่า ความสัมพันธ์เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ สามารถเขียนแบบแจกแจงสมาชิกหรือแบบบอกเงื่อนไขก็ได้ เช่น

ให้ $A = \{3, 5, 8, 10\}$ และ $B = \{2, 6, 9\}$

$$A \times B = \{(3, 2), (3, 6), (3, 9), (5, 2), (5, 6), (5, 9), (8, 2), (8, 6), (8, 9), (10, 2), (10, 6), (10, 9)\}$$

ถ้า r_1 เป็นความสัมพันธ์ “น้อยกว่า” จาก A ไป B

จะได้ว่า $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$

หรือ $r_1 = \{(3, 6), (3, 9), (5, 6), (5, 9), (8, 9)\}$

ถ้า r_2 เป็นความสัมพันธ์ “เท่ากับ” จาก A ไป B

จะได้ว่า $r_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$

หรือ $r_2 = \varnothing$

หมายเหตุ ในกรณีที่ A และ B เป็นเซตของจำนวนจริง อาจละการเขียน $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ไว้ในฐานที่เข้าใจว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนจริง เช่น

$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ อาจเขียนเป็น $r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

หรือเขียนเฉพาะเงื่อนไขซึ่งบรรยายลักษณะของความสัมพันธ์ เช่น $x^2 + y^2 = 1$

กราฟของความสัมพันธ์

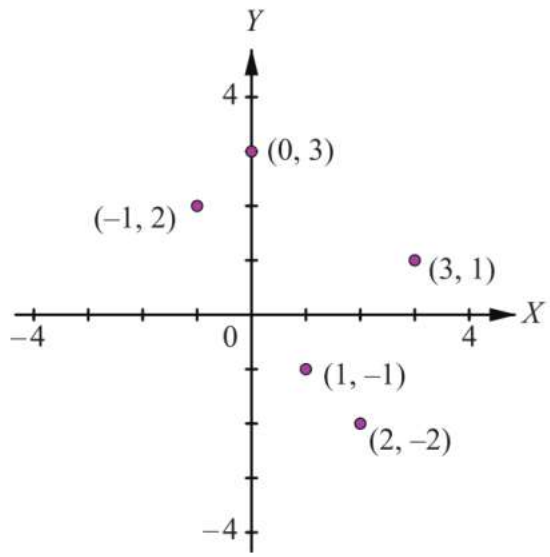
ในระบบพิกัดฉาก สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับของจำนวนจริง (x, y) กับจุดในระนาบ โดยให้ x เป็นพิกัดแรก และ y เป็นพิกัดหลัง

บทนิยาม 3

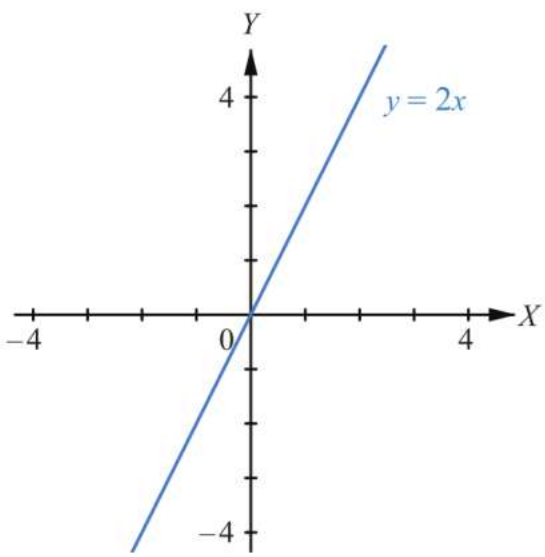
ให้ r เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบที่แสดงคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

จากบทนิยามของกราฟของความสัมพันธ์ เมื่อทราบความสัมพันธ์แล้วจะเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่าง ๆ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$r_1 = \{(-1, 2), (0, 3), (1, -1), (2, -2), (3, 1)\}$ $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = 2x\}$

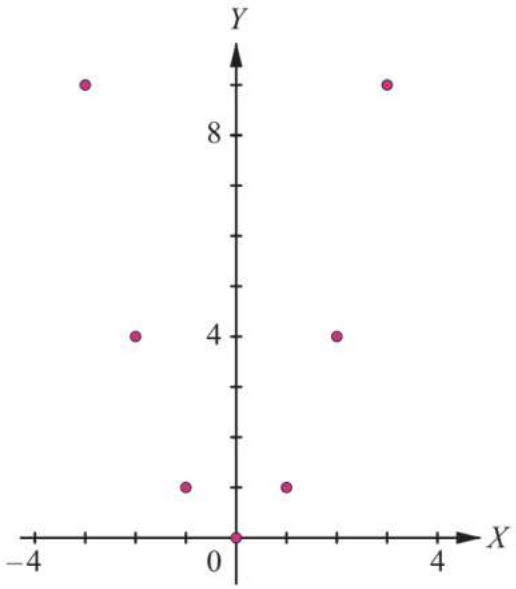


รูปที่ 1



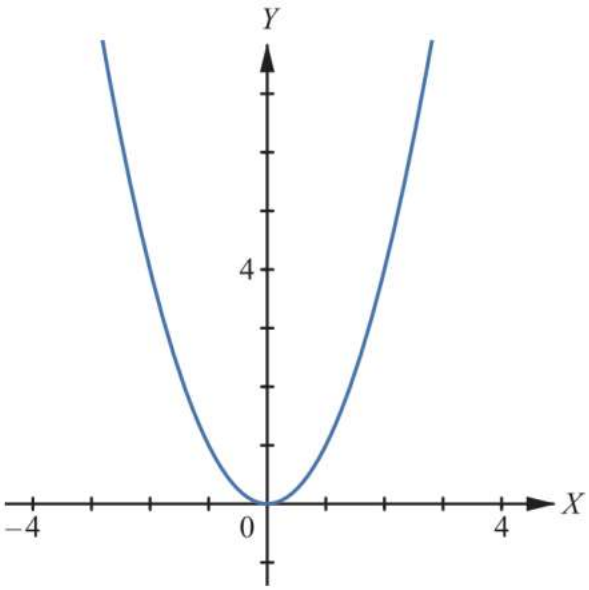
รูปที่ 2

$r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$



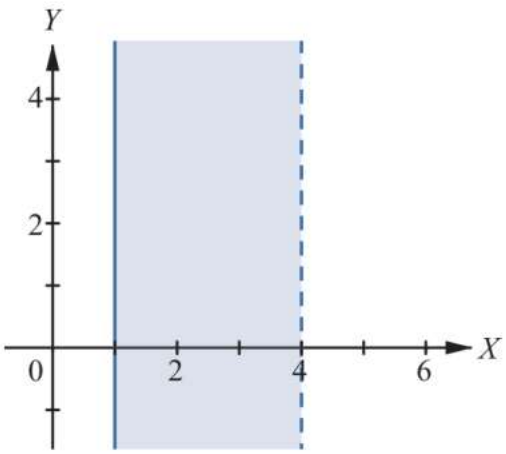
รูปที่ 3

$r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$



รูปที่ 4

$r_5 = \{(x, y) \mid 1 \le x < 4\}$

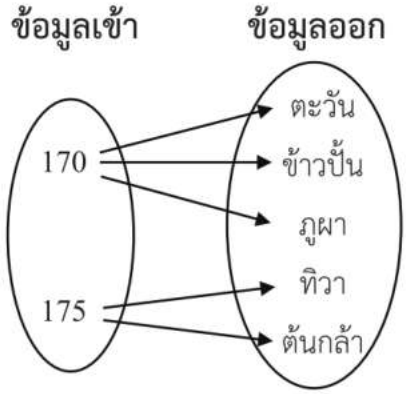


รูปที่ 5

หมายเหตุ จากรูปที่ 5 กราฟของ r_5 เป็นส่วนหนึ่งของระนาบที่แรเงาในรูป ส่วนที่เป็นเส้นทึบแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นนั้นรวมอยู่ในกราฟ ส่วนที่เป็นเส้นประแสดงว่าจุดทุกจุดบนเส้นประนั้นไม่รวมอยู่ในกราฟ

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

พิจารณา



ความสัมพันธ์ r คือ $\{(170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูผา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า})\}$ จะเห็นว่า เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{170, 175\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **โดเมน (domain)** ของ r และเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r คือ $\{\text{ตะวัน}, \text{ข้าวปั้น}, \text{ภูผา}, \text{ทิวา}, \text{ต้นกล้า}\}$ เรียกเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ r ว่า **เรนจ์ (range)** ของ r

บทนิยาม 4

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r
เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r

โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r และเรนจ์ของ r เขียนแทนด้วย R_r เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

เขียน D_r และ R_r ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้

$$D_r = \{ x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r \}$$
$$R_r = \{ y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r \}$$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และกำหนดให้ความสัมพันธ์ r บนเซต A คือ $\{ (x, y) \in A \times A \mid y = x^2 \}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้

วิธีทำ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A หมายถึง $r \subset A \times A$

จะได้ $r = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

ดังนั้น $D_r = \{-1, 0, 1\}$

$R_r = \{0, 1\}$ ■

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{16 - x^2} \}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{16 - x^2}$ จะเห็นว่า $16 - x^2$ ต้องไม่เป็นจำนวนลบ เพราะรากที่สองของจำนวนลบไม่เป็นจำนวนจริง

นั่นคือ $16 - x^2 \geq 0$ ซึ่งเป็นอสมการที่มีเซตคำตอบ คือ $\{ x \mid -4 \leq x \leq 4 \}$

ดังนั้น $D_r = \{ x \mid -4 \leq x \leq 4 \} = [-4, 4]$

เนื่องจาก $\sqrt{16 - x^2}$ ไม่เป็นจำนวนลบ และเมื่อแทน x ด้วย 0 จะได้ค่ามากที่สุดเป็น 4

ดังนั้น $R_r = \{ y \mid 0 \leq y \leq 4 \} = [0, 4]$ ■

ตัวผกผันของความสัมพันธ์

พิจารณาความสัมพันธ์

$$r = \{(170, \text{ตะวัน}), (170, \text{ข้าวปั้น}), (170, \text{ภูผา}), (175, \text{ทิวา}), (175, \text{ต้นกล้า})\}$$

ถ้าสลับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับ จะได้ความสัมพันธ์

$$s = \{(\text{ตะวัน}, 170), (\text{ข้าวปั้น}, 170), (\text{ภูผา}, 170), (\text{ทิวา}, 175), (\text{ต้นกล้า}, 175)\}$$

โดเมนของ s คือ { ตะวัน, ข้าวปั้น, ภูผา, ทิวา, ต้นกล้า } และเรนจ์ของ s คือ $\{170, 175\}$ จะเห็นว่าโดเมนของ r คือ เรนจ์ของ s และเรนจ์ของ r คือ โดเมนของ s โดยที่ s ได้จากการสลับสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน r เรียก s ว่า **ตัวผกผันของความสัมพันธ์** r

บทนิยาม 5

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

เขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\}$$

จากบทนิยาม ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว r^{-1} จะเป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

ตัวอย่างที่ 4

จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ r พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์
เมื่อกำหนดให้ $r = \{(1,1),(3,2),(1,3),(4,1),(0,-1)\}$

วิธีทำ $r^{-1} = \{(1,1),(2,3),(3,1),(1,4),(-1,0)\}$

$D_{r^{-1}} = \{-1,1,2,3\}$

$R_{r^{-1}} = \{0,1,3,4\}$

ตัวอย่างที่ 5

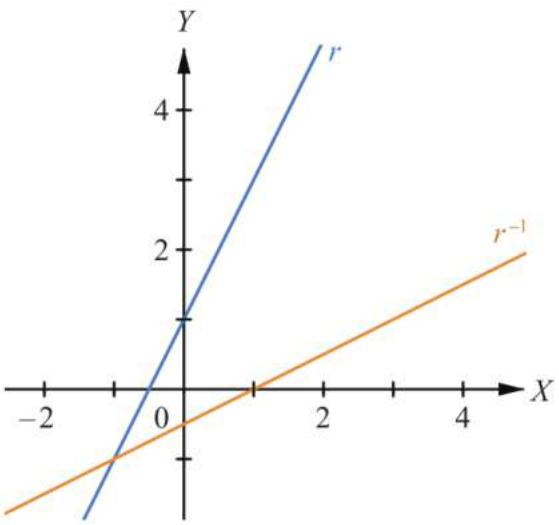
จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน
เมื่อกำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x+1\}$

วิธีทำ จาก $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x+1\}$

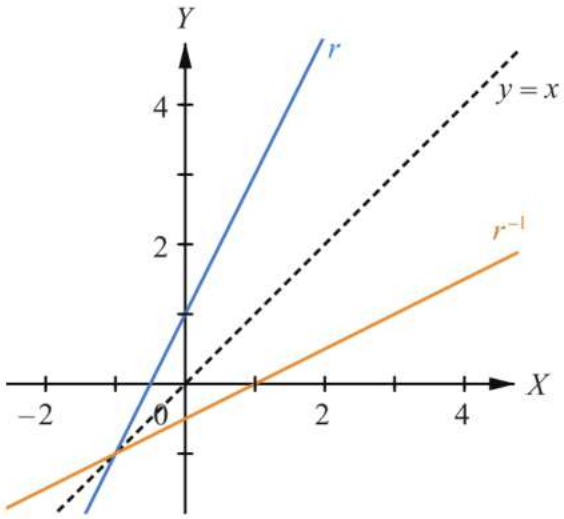
$r^{-1} = \{(y,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x+1\}$

หรือ $r^{-1} = \left\{(y,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{y-1}{2}\right\}$

หรือ $r^{-1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{2}\right\}$



กราฟของความสัมพันธ์ใด ๆ กับกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์นั้นจะมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร ดังเช่นกราฟของ r และ r^{-1} ในตัวอย่างที่ 5 มีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร เขียนได้ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

เพื่อความสะดวก จะเรียกจุดที่มีพิกัดเป็น (a, b) ว่าจุด (a, b) จากรูปที่ 6 ถ้าจุด (a, b) อยู่บนกราฟของ r จะเห็นว่าเมื่อลากส่วนของเส้นตรงจากจุด (a, b) บนกราฟของ r ไปยังจุด (b, a) บนกราฟของ r^{-1} ส่วนของเส้นตรงนี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ และระยะจากจุด (a, b) ถึงเส้นตรง $y = x$ เท่ากับระยะจากจุด (b, a) ถึงเส้นตรง $y = x$ และจะได้ว่าจุด (a, b) และ (b, a) เป็นจุดสมมาตรที่มีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร นั่นคือ ถ้าพับรูปนี้ตามแนวเส้นตรง $y = x$ แล้ว กราฟของความสัมพันธ์ r และ r^{-1} จะทับกันพอดี

ตัวอย่างที่ 6

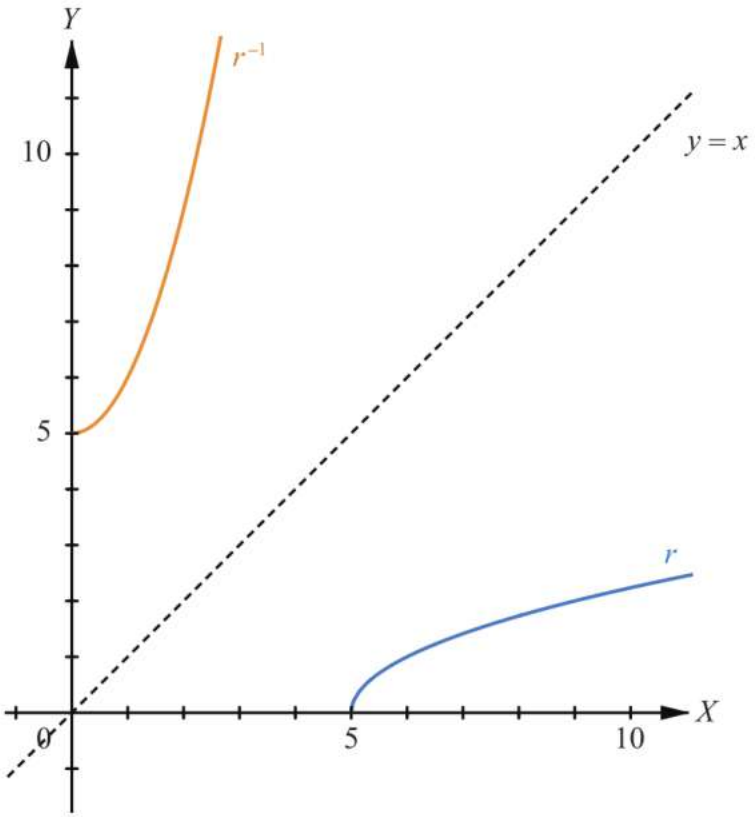
จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-5}\}$

วิธีทำ จาก $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-5}\}$

$r^{-1} = \{(y, x) \mid y = \sqrt{x-5}\}$

หรือ $r^{-1} = \{(y, x) \mid y \geq 0 \text{ และ } x = y^2 + 5\}$

หรือ $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ และ } y = x^2 + 5\}$



ข้อสังเกต สมการ $y = \sqrt{x-5}$ บอกให้ทราบว่า $y \geq 0$

จากสมการ $x = y^2 + 5$ จะได้ว่า y อาจเป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบก็ได้ แต่เนื่องจาก y ในที่นี้คือสมาชิกของเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ จึงจำเป็นต้องเขียน $y \geq 0$ กำกับไว้

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหา $A\times B$ และ $B\times A$ เมื่อกำหนด A และ B ดังต่อไปนี้
   1) $A=\{1,2\}$ และ $B=\{3,6,7\}$
   2) $A=\{a,b,c\}$ และ $B=\{e,f\}$
   3) $A=\{-3,-2,-1\}$ และ $B=\{1,2,3\}$

2. ถ้า n เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A และ m เป็นจำนวนสมาชิกของเซต B แล้ว จงหาจำนวนสมาชิกของ $A\times B, B\times A, A\times A$ และ $B\times B$

3. กำหนดให้ $M=\{1,2\}, N=\{2,3\}$ และ $P=\{4,5\}$ จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
   1) $(M\times N)\cup(M\times P)$
   2) $M\times(N\cup P)$
   3) $M\times(N\cap P)$
   4) $(M\times N)\cap(M\times P)$

4. ถ้า $E=\{1,2,3\}$ และ $r=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,2),(3,3),(2,1)\}$ แล้ว จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซต E หรือไม่

5. ให้ $A=\{0,2,4\}, B=\{0,1,2\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B กำหนดโดย $(x,y)\in r$ เมื่อ $x>y$
   1) จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก
   2) จงเขียน r แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

6. ให้ $S=\{1,2,3,4,5\}$ กำหนด r_1, r_2 และ r_3 เป็นความสัมพันธ์บนเซต S ดังต่อไปนี้

   $r_1 = \{(x,y)\in S\times S \mid x+y=6\}$

   $r_2 = \{(x,y)\in S\times S \mid x>2 \text{ และ } y=3\}$

   $r_3 = \{(x,y)\in S\times S \mid x-y=6\}$

   จงเขียน r_1, r_2 และ r_3 แบบแจกแจงสมาชิก พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของแต่ละความสัมพันธ์

7. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $r=\{(-3,9),(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$

2) $m=\{(-2,\sqrt{2}),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,\sqrt{2})\}$

3) $n=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid y=x-2\}$

4) $p=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2}\}$

5) $q=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$

6) $s=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid y=|x-2|\}$

7) $t=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x^2+2}\}$

8) $v=\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2}\}$

9) $w=\left\{(x,y)\mid y=\dfrac{1}{x-2}\right\}$

8. จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1) $r=\{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1)\}$

2) $r=\{\ldots,(-5,4),(-3,2),(-1,0),(1,2),(3,4),(5,6),\ldots\}$

3) $r=\{(x,y)\mid y=2-3x\}$

4) $r=\{(x,y)\mid xy=1\}$

9. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r ดังต่อไปนี้

1) $r=\{(x,y)\in A\times A\mid y\geq x+1\}$ เมื่อ $A=\{1,2,3,4\}$

2) $r=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid y^2=x\}$

3) $r=\{(x,y)\mid y<x-1\}$

1.2 ฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ที่ **สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว** เป็นความสัมพันธ์ที่มีความสำคัญและใช้มากในคณิตศาสตร์ จะเรียกความสัมพันธ์ที่มีสมบัติดังกล่าวว่า **ฟังก์ชัน (function)** ซึ่งนิยามดังนี้

บทนิยาม 6

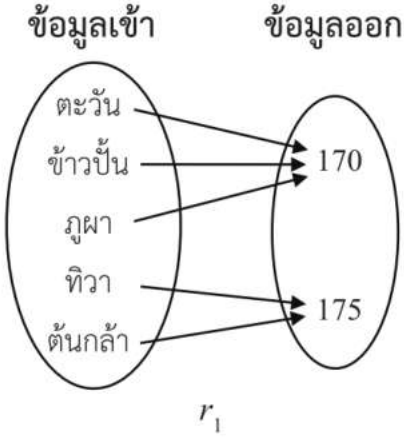
ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งคู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

จากบทนิยามกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งสำหรับ x, y และ z ใด ๆ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$
ดังนั้น ถ้ามี x, y และ z โดยที่ $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แต่ $y \neq z$ จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 7

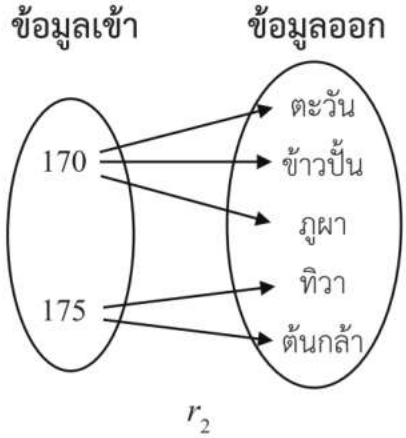
จากแผนภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

1)



r_1

2)



r_2

วิธีทำ 1) จากแผนภาพพบว่า ไม่มีสมาชิกใดในโดเมนของ r_1 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_1 มากกว่า 1 ตัว ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน

2) จากแผนภาพพบว่า 170 ซึ่งอยู่ในโดเมนของ r_2 จับคู่กับตะวัน ข้าวปั้น และภูผาซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์ของ r_2 ดังนั้น r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน ■

ตัวอย่างที่ 8

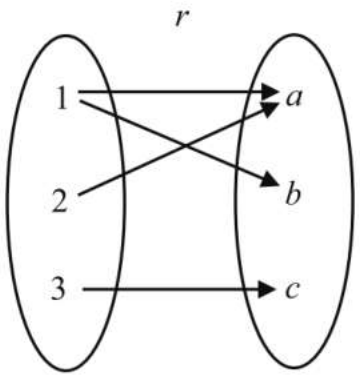
กำหนดความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดบ้างเป็นฟังก์ชัน

1) $r = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, c)\}$

2) $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$

3) $g = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$

วิธีทำ 1) เขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของโดเมนกับสมาชิกของเรนจ์ของ r ได้ดังนี้



จะได้ว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันคือ $(1, a)$ และ $(1, b)$

2) ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ จะได้ว่า $y = x^2 + 1$ และ $z = x^2 + 1$ ซึ่งสรุปได้ว่า $y = z$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

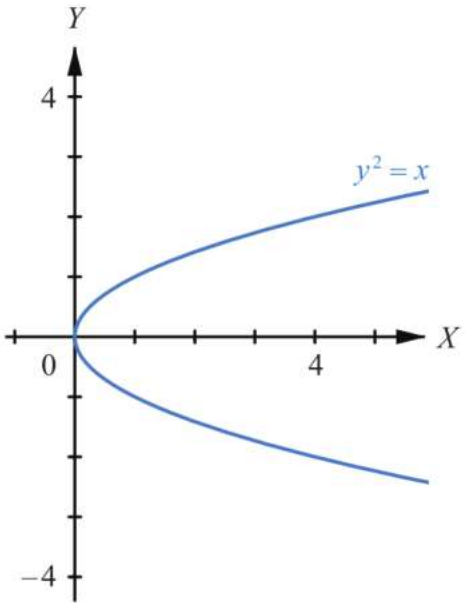
3) เนื่องจาก $(4, 2) \in g$ และ $(4, -2) \in g$ แต่ $2 \neq -2$ ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชัน ■

การพิจารณาว่า ความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนจริงเป็นฟังก์ชันหรือไม่ อาจพิจารณาได้จากกราฟของความสัมพันธ์ โดยลากเส้นขนานกับแกน Y ถ้าไม่มีเส้นขนานกับแกน Y เส้นใดตัดกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้มากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นจะเป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ามีเส้นขนานกับแกน Y แม้เพียงเส้นเดียวตัดกราฟมากกว่า 1 จุดแล้ว ความสัมพันธ์นั้นจะไม่เป็นฟังก์ชัน

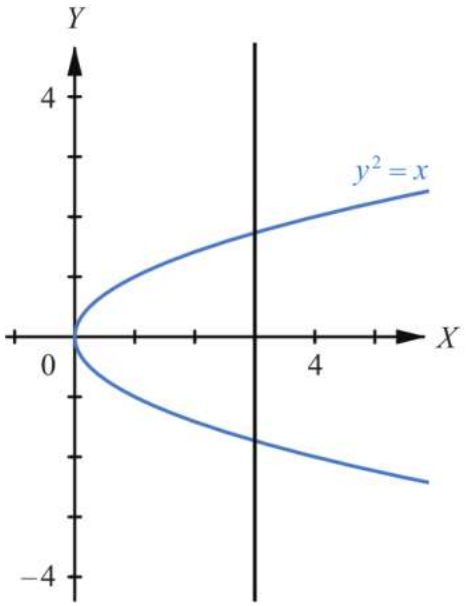
ตัวอย่างที่ 9

ให้ $r = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ จงพิจารณาว่า r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เขียนกราฟของ r ได้ดังรูป (ก)



(ก)



(ข)

จากกราฟในรูป (ก) จะเห็นว่า แต่ละค่าของ x ที่ $x > 0$ เมื่อลากเส้นขนานกับแกน Y ผ่านค่า x เหล่านี้ จะตัดกราฟสองจุด คือ $(x, \sqrt{x})$ และ $(x, -\sqrt{x})$ เช่นดังรูป (ข)
ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน ■

ข้อตกลง ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน จะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ และเรียก $f(x)$ ว่าเป็น **ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x** อ่านว่า **เอฟของเอกซ์** หรือ **เอฟเอกซ์** เพื่อความสะดวก บางครั้งจะกล่าวถึง "ฟังก์ชัน $f(x)$" โดยละไว้ในฐานที่เข้าใจว่ากำลังกล่าวถึงฟังก์ชัน f ที่มีค่าของฟังก์ชันที่ x เป็น $f(x)$

ตัวอย่างที่ 10

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=x^2-x+2$ จงหา $f(-2), f(0), f(1)$ และ $f(a)$ เมื่อ $a\in\mathbb{R}$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2-x+2$

จะได้ $f(-2) = (-2)^2-(-2)+2 = 8$

$f(0) = 0^2-0+2 = 2$

$f(1) = 1^2-1+2 = 2$

$f(a) = a^2-a+2$ ■

ตัวอย่างที่ 11

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$ จงหา $f(-2), f(0), f(1)$ และ $f(3)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$

จะได้ $f(-2) = \dfrac{\sqrt{2-(-2)}}{-2} = \dfrac{\sqrt{4}}{-2} = -1$

$f(0) = \dfrac{\sqrt{2-0}}{0}$ ซึ่งไม่นิยามเศษส่วนที่ตัวส่วนเป็น 0

ดังนั้น $f(0)$ ไม่นิยาม

$f(1) = \dfrac{\sqrt{2-1}}{1} = 1$

$f(3) = \dfrac{\sqrt{2-3}}{3} = \dfrac{\sqrt{-1}}{3}$

เนื่องจาก $\sqrt{-1}$ ไม่นิยามในระบบจำนวนจริง ดังนั้น $f(3)$ ไม่นิยาม ■

จากตัวอย่างที่ 11 จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f หาค่าได้ที่บางค่า x แต่ไม่นิยามที่บางค่า x เซตของค่า x ซึ่งฟังก์ชัน f หาค่าได้ที่ x เรียกว่าโดเมนของฟังก์ชัน f และเซตของค่าของฟังก์ชัน f ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เรียกว่าเรนจ์ของฟังก์ชัน f

กล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f คือโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 12

กำหนด $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x}$ จงหาโดเมนของ f

วิธีทำ ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $2-x\geq 0$ และ $x\neq 0$
นั่นคือ $x\leq 2$ และ $x\neq 0$
ดังนั้น โดเมนของ f คือ $(-\infty, 2]-\{0\}$ ■

ตัวอย่างที่ 13

จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x)=-2x^2$ 2) $g(x)=\frac{1}{x}$ 3) $h(x)=\sqrt{x}$

วิธีทำ 1) ให้ $y=f(x)=-2x^2$

จะเห็นว่าฟังก์ชัน f นิยามที่ทุก $x\in\mathbb{R}$

ดังนั้น $D_f = \mathbb{R}$

เนื่องจาก $y=-2x^2$ ดังนั้น $-\frac{y}{2}=x^2$

เนื่องจาก $x^2\geq 0$ ดังนั้น $-\frac{y}{2}\geq 0$ แสดงว่า $y\leq 0$

ดังนั้น $R_f=\{y\in\mathbb{R}\mid y\leq 0\}=(-\infty, 0]$

2) ให้ $y=g(x)=\frac{1}{x}$

เมื่อ $x=0$ จะไม่สามารถหา $\frac{1}{x}$ ที่เป็นจำนวนจริงได้

เมื่อ $x \neq 0$ สามารถนิยาม $\frac{1}{x}$ ได้เสมอ

ดังนั้น $D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ 0 \}$

เนื่องจาก $y = \frac{1}{x}$ จะได้ว่า $xy = 1$ ดังนั้น $y \neq 0$

จะได้ $R_g = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ 0 \}$

3) ให้ $y = h(x) = \sqrt{x}$

เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ $y = \sqrt{x} \geq 0$

เมื่อ $x < 0$ จะไม่สามารถหา $\sqrt{x}$ ที่เป็นจำนวนจริงได้

ดังนั้น $D_h = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \} = [0, \infty)$

$R_h = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \} = [0, \infty)$ ■

ถ้าโดเมนของฟังก์ชัน f คือเซต A และเรนจ์ของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของเซต B เรียกฟังก์ชันที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า **ฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A into B)**

บทนิยาม 7

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \to B$

โดยทั่วไป เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชันโดยไม่ระบุว่าเป็นฟังก์ชันจากเซตใดไปเซตใด จะหมายถึงฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนของฟังก์ชันคือ A และเรนจ์ของฟังก์ชันคือ B เรียกฟังก์ชันที่มีสมบัติเช่นนี้ว่า **ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)**

บทนิยาม 8

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และเรนจ์เป็น B

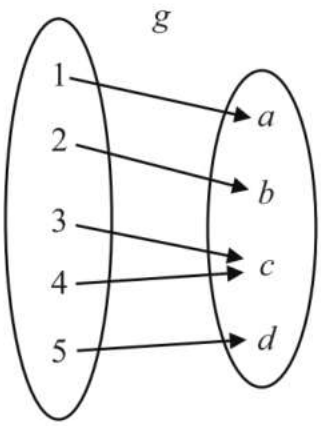
f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{} B$

ตัวอย่างที่ 14

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

และกำหนดฟังก์ชัน g ดังแผนภาพ



จงพิจารณาว่า g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่

วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้ว่า $D_g = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

และ $R_g = \{a, b, c, d\} = B$

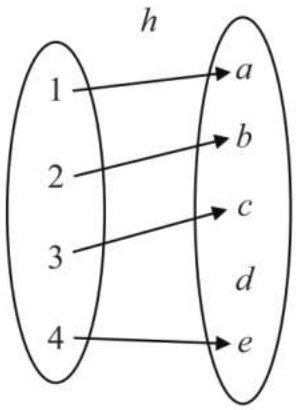
ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ■

ตัวอย่างที่ 15

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

และกำหนดฟังก์ชัน h ดังแผนภาพ



จงพิจารณาว่า h เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากมี $d \in B$ ที่ $d \notin R_h$

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ■

ตัวอย่างที่ 16

กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = x^2 + 1$

จะได้ว่า $y - 1 = x^2$ และ $x^2 \geq 0$ ดังนั้น $y \geq 1$

จะได้ $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\} = [1, \infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ แต่ f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ ■

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[1, \infty)$

ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่ไม่มีสมาชิกใน A สองตัวใด ๆ ที่จับคู่กับสมาชิกใน B ตัวเดียวกัน นั่นคือ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one–to–one function)** จาก A ไป B

บทนิยาม 9

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งสำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1)=f(x_2)$ แล้ว $x_1=x_2$

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f:A\xrightarrow{1\text{–}1}B$

จากบทนิยาม $f:A\to B$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มี x_1 และ x_2 ใน A ที่ $x_1\neq x_2$ แต่ $f(x_1)=f(x_2)$

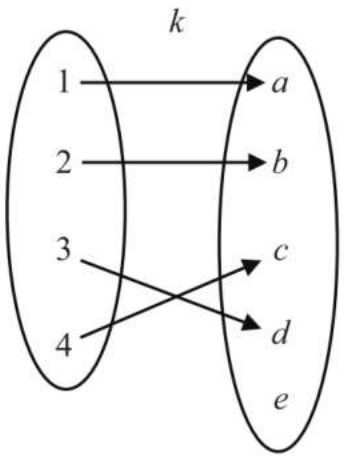
f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one–to–one function from A onto B** หรือ **one–to–one correspondence)** เขียนแทนด้วย $f:A\xrightarrow[\text{onto}]{1\text{–}1}B$ หมายถึง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ตัวอย่างที่ 17

ให้ $A=\{1,2,3,4\}$

$B=\{a,b,c,d,e\}$

และกำหนดฟังก์ชัน k ดังแผนภาพ



จงพิจารณาว่า k เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B หรือไม่

วิธีทำ จากแผนภาพ ไม่มีสมาชิกใน A สองตัวใด ๆ ที่จับคู่กับสมาชิกใน B ตัวเดียวกัน
นั่นคือ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $k(x_1) \neq k(x_2)$
ดังนั้น k เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

ตัวอย่างที่ 18

จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

1) $f(x) = 2 - x$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

วิธีทำ 1) จาก $f(x) = 2 - x$ จะได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $2 - x_1 = 2 - x_2$

$-x_1 = -x_2$

ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) จาก $f(x) = x^2 + 2x + 1$ จะได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $x_1^2 + 2x_1 + 1 = x_2^2 + 2x_2 + 1$

$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0$

นั่นคือ $x_1 - x_2 = 0$ หรือ $x_1 + x_2 + 2 = 0$

$x_1 = x_2$ หรือ $x_2 = -x_1 - 2$

จะเห็นว่า มีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$

เช่น ให้ $x_1 = 0$ และ $x_2 = -0-2 = -2$

จะได้ $f(x_1) = f(0) = (0)^2 + 2(0) + 1 = 1$

และ $f(x_2) = f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 1 = 1$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ■

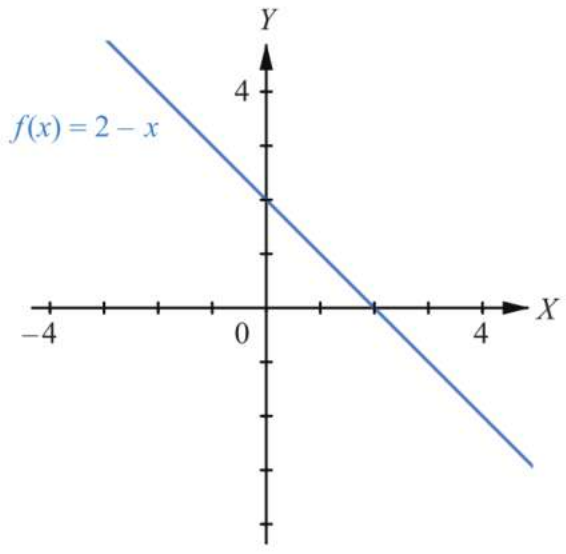
ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ นอกจากการตรวจสอบโดยใช้บทนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว อาจพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันนั้นได้ โดยลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟของฟังก์ชันนั้น

ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ เส้นขนานกับแกน X ทุกเส้นตัดกราฟของฟังก์ชัน f ไม่เกิน 1 จุด

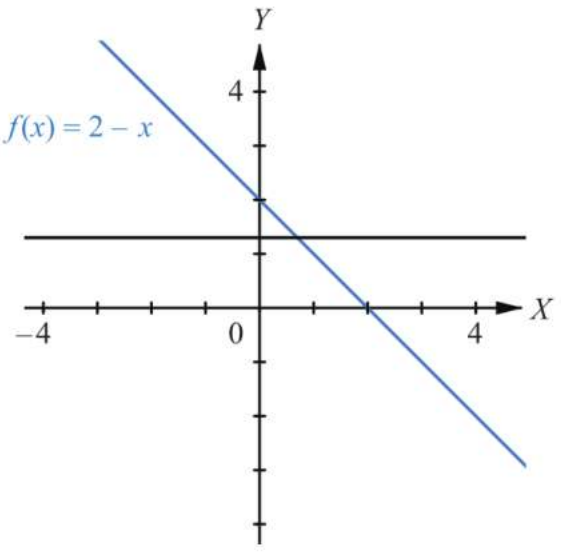
ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มีเส้นขนานกับแกน X อย่างน้อยหนึ่งเส้นที่ตัดกราฟของ f มากกว่า 1 จุด

จากการตรวจสอบฟังก์ชันในตัวอย่างที่ 18 ฟังก์ชัน $f(x) = 2-x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อพิจารณากราฟของฟังก์ชันทั้งสอง จะพบว่า

กราฟของ $f(x) = 2-x$ เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X ดังรูปที่ 7ก



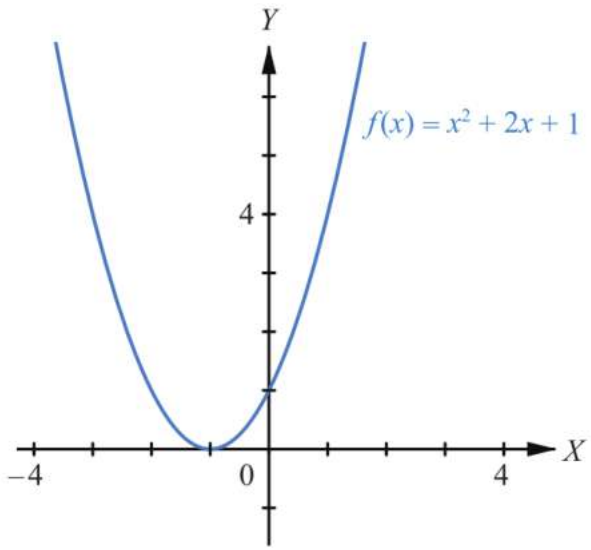
รูปที่ 7ก



รูปที่ 7ข

เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ ดังรูปที่ 7ข จะพบว่าเส้นที่ขนานกับแกน X แต่ละเส้นจะตัดกราฟของ $y=f(x)=2-x$ เพียงจุดเดียว แสดงว่า สำหรับจำนวนจริง x_1 และ x_2 ใด ๆ ไม่มี x_1 และ x_2 ที่ต่างกันที่ทำให้ $f(x_1)$ เท่ากับ $f(x_2)$

กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+2x+1$ เขียนได้ดังรูป



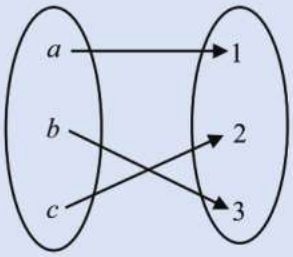
รูปที่ 8

เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน X ที่ตัดกราฟของ $y=f(x)=x^2+2x+1$ สองจุด นั่นคือ มี x ที่ต่างกันที่ทำให้ได้ $f(x)$ เท่ากัน เช่น เส้นตรง $y=1$ ตัดกราฟที่จุด $(0,1)$ และ $(-2,1)$ เป็นต้น

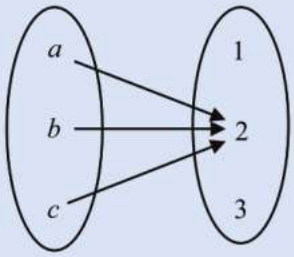
แบบฝึกหัด 1.2ก

1. จงพิจารณาว่าแผนภาพที่กำหนดให้ต่อไปนี้ แผนภาพใดแสดงความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน

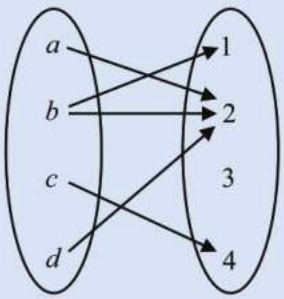
1)



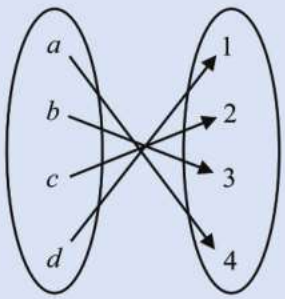
2)



3)

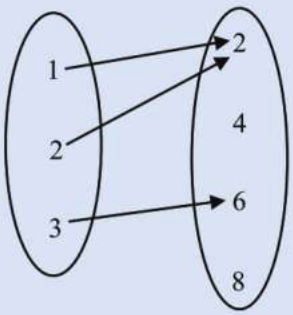


4)

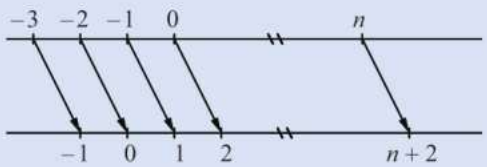


2. จากแผนภาพหรือกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ในข้อใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันและข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

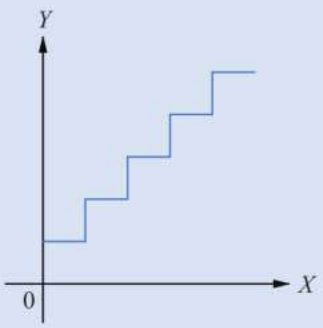
1)



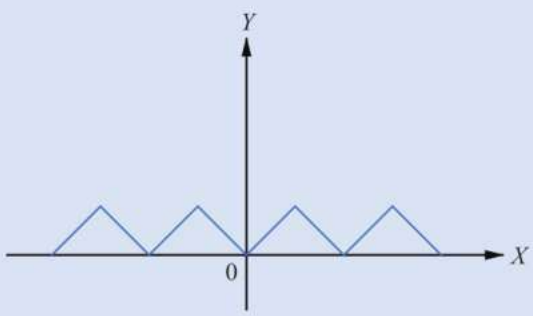
2)



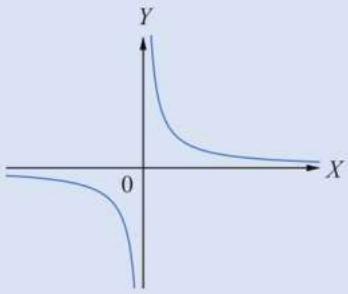
3)



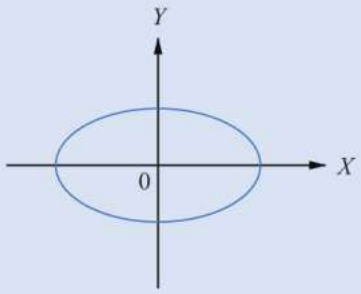
4)



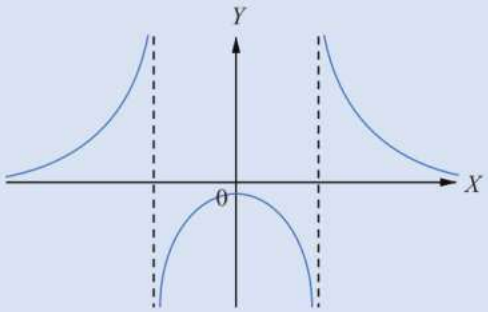
5)



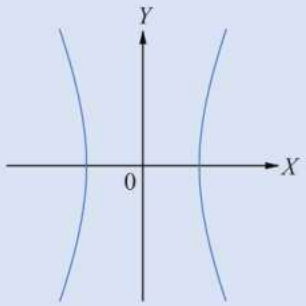
6)



7)



8)



3. ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน ถ้าไม่เป็น จงให้เหตุผล

1) $\{(1, a), (2, b), (3, b), (3, c)\}$

2) $\{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$

3) $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 2\}$ เมื่อ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

4) $\{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$ เมื่อ $A = \{0, 1\}$ และ $B = \{-1, 1\}$

5) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

6) $\{(x, y) \mid x + y = 5\}$

7) $\{(x, y) \mid x^3 + 3y = 4\}$

8) $\{(x, y) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\}$

9) $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 3\}$

4. จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ในรูปตารางต่อไปนี้ ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1)

A	B
a	1
b	2
c	2
d	4
e	3

2)

A	B
a	1
b	2
a	3
b	4
c	5

3)

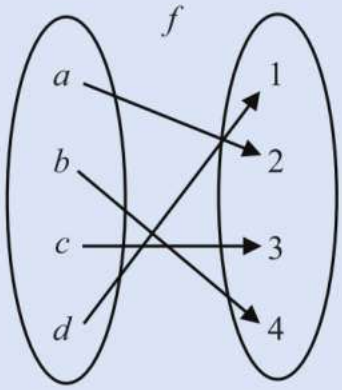
A	B
a	1
b	3
c	2
d	4
e	5

4)

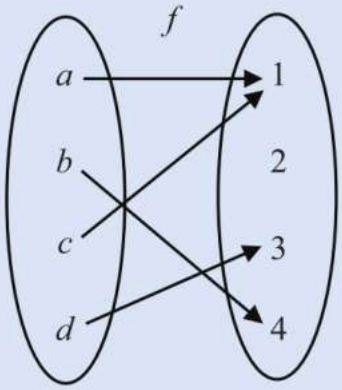
A	B
a	1
a	2
a	3
b	2
c	5

5. จากแผนภาพแสดงฟังก์ชัน f จงหา $f(a), f(b), f(c)$ และ $f(d)$

1)



2)



6. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จงเขียนฟังก์ชัน f แบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ

1) $f(x) = x^2$
2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
3) $f(x) = \sqrt{x+2}$
4) $f(x) = |x+1|$

7. ให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x & \text{เมื่อ } 1 \le x \le 3 \\ 2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

จงหา $f(-2), f(0), f(1), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\sqrt{3}\right), f(9)$ และ $f(3+h) - f(3)$ เมื่อ $h > 0$

8. ให้ $f = \{(x, y) \mid y = x^3 + 4x - 3\}$ จงพิจารณาว่า

1) $f(3+2)$ เท่ากับ $f(3) + f(2)$ หรือไม่
2) $f(3 \cdot 2)$ เท่ากับ $f(3)f(2)$ หรือไม่

9. กำหนด $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $A \times A$ จงเขียนกราฟพร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

1) $f(x) = 2x$
2) $f(x) = 2x - 3$
3) $f(x) = 2x^2$
4) $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

10. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}$
2) $f(x) = \sqrt{x+2}$
3) $f(x) = x^2 - 1$
4) $f(x) = |x|$

11. กำหนดให้ $h(x) = x^2 - 6$ และ $D_h = \{x \mid -4 < x < 3\}$ จงหา R_h

12. กำหนดให้ $A=\{a,b,c\}$ และ $B=\{b,c,d\}$

$f_1=\{(a,c),(b,d),(c,c)\}$ $f_2=\{(a,d),(b,b),(c,c)\}$

$f_3=\{(b,a),(c,c),(d,a)\}$ $f_4=\{(a,b),(c,c),(b,c)\}$

$f_5=\{(a,b),(b,c),(c,d)\}$ $f_6=\{(a,c),(b,c),(c,c)\}$

$f_7=\{(b,b),(c,c),(d,a)\}$

พิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็น

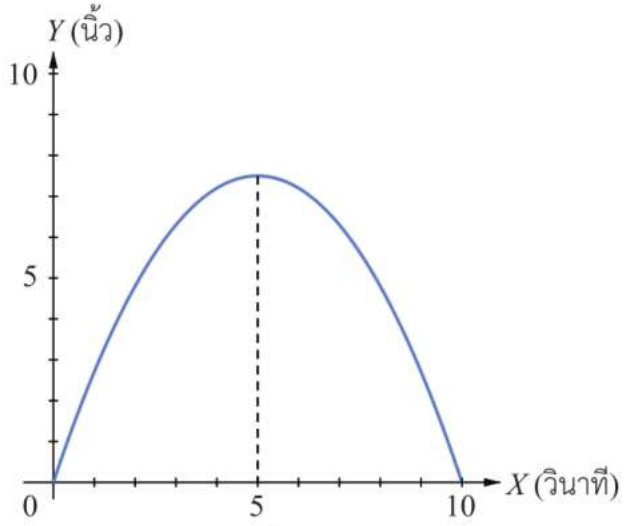
1) ฟังก์ชันจาก A ไป B
2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
3) ฟังก์ชันจาก B ไป A
4) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B
5) ฟังก์ชันจาก A ไป A
6) ฟังก์ชัน $1-1$ จาก A ไป B
7) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
8) ฟังก์ชัน $1-1$ จาก B ไป A

13. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน $1-1$

1) $f(x)=x^2+x$ 2) $g(x)=2x+5$ 3) $h(x)=|2x-1|$

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

ในการโยนลูกบอลจากระดับพื้นดินขึ้นไปในแนวดิ่ง ลูกบอลจะขึ้นไปจนถึงจุดสูงสุดแล้วตกลงมาถึงพื้นในเวลา 10 วินาที เมื่อวัดความสูง (นิ้ว) ของลูกบอลจากระดับพื้นดิน ขณะเวลาต่าง ๆ จะได้ว่าความสูงของลูกบอลจากระดับพื้นดินเป็นฟังก์ชันของเวลา กราฟของฟังก์ชันนี้แสดงได้ดังรูป



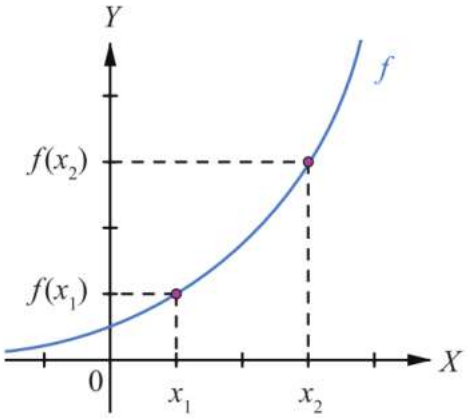
รูปที่ 9

จากกราฟ พบว่า ในช่วงวินาทีที่ 0 ถึงวินาทีที่ 5 ความสูงของลูกบอลเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และจากวินาทีที่ 5 ถึงวินาทีที่ 10 ความสูงของลูกบอลลดลงเรื่อย ๆ ในกรณีนี้จะกล่าวว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, 5]$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[5, 10]$

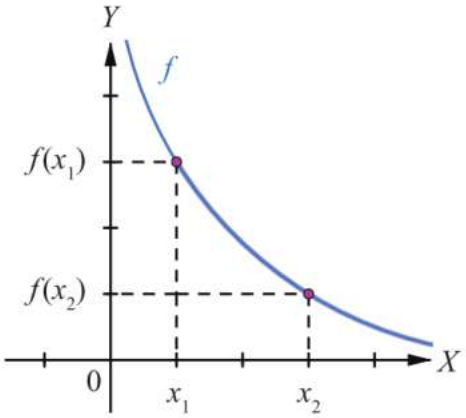
บทนิยาม 10

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

1. f เป็น **ฟังก์ชันเพิ่ม (increasing function)** บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
2. f เป็น **ฟังก์ชันลด (decreasing function)** บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$



ฟังก์ชันเพิ่ม
รูปที่ 10ก

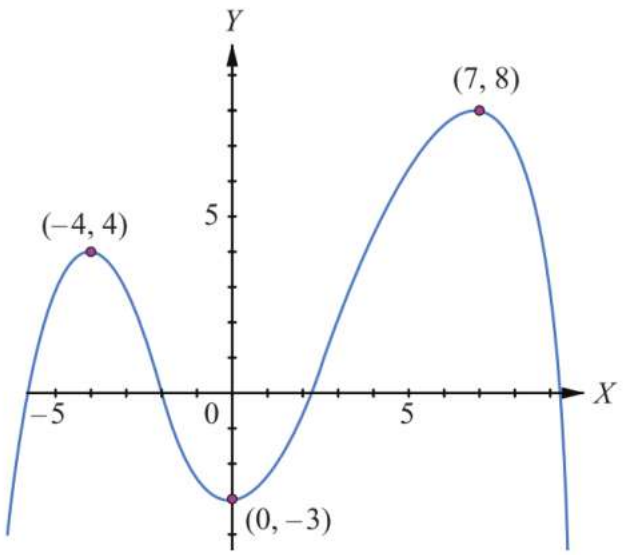


ฟังก์ชันลด
รูปที่ 10ข

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนโดเมน D_f จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 19

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูป จงระบุช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด



วิธีทำ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -4]$ และบนช่วง $[0, 7]$
ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-4, 0]$ และบนช่วง $[7, \infty)$ ■

ตัวอย่างที่ 20

จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

1) $f(x)=3x-2$ บน $\mathbb{R}$

2) $g(x)=-x^3+1$ บน $\mathbb{R}$

3) $h(x)=\frac{2}{x}$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ และ $(0, \infty)$

วิธีทำ 1) สำหรับ $f(x)=3x-2$

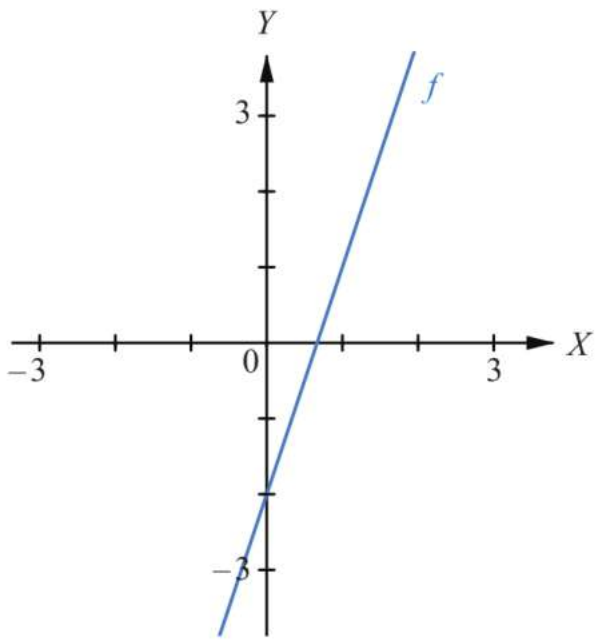
ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้ว่า $3x_1 < 3x_2$

$3x_1-2 < 3x_2-2$

$f(x_1) < f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\mathbb{R}$



2) สำหรับ $g(x)=-x^3+1$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1<x_2$

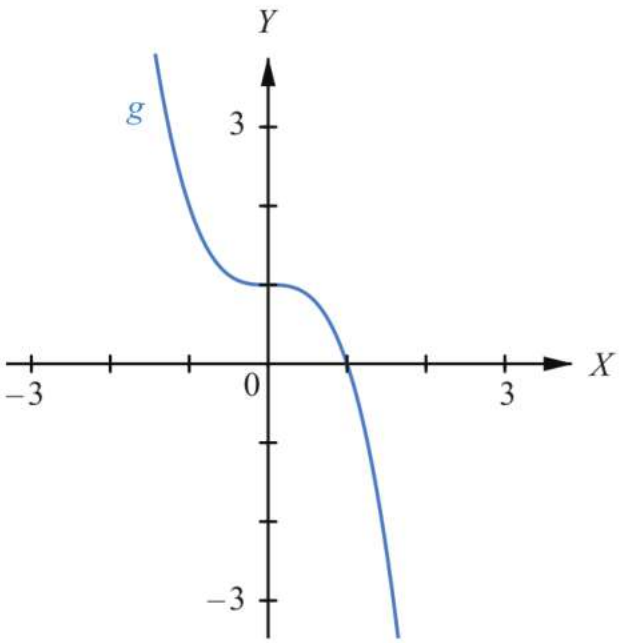
จะได้ว่า $x_1^3 < x_2^3$

$-x_1^3 > -x_2^3$

$-x_1^3+1 > -x_2^3+1$

$g(x_1) > g(x_2)$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันลดบน $\mathbb{R}$



3) พิจารณาฟังก์ชัน $h(x)=\frac{2}{x}$ บนช่วง $(-\infty, 0)$ และบนช่วง $(0, \infty)$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $(-\infty, 0)$ ซึ่ง $x_1<x_2$

จะได้ว่า $2x_1 < 2x_2$

$\frac{2x_1}{x_1x_2} < \frac{2x_2}{x_1x_2}$ เนื่องจาก $x_1x_2>0$

$$\frac{2}{x_2} < \frac{2}{x_1}$$

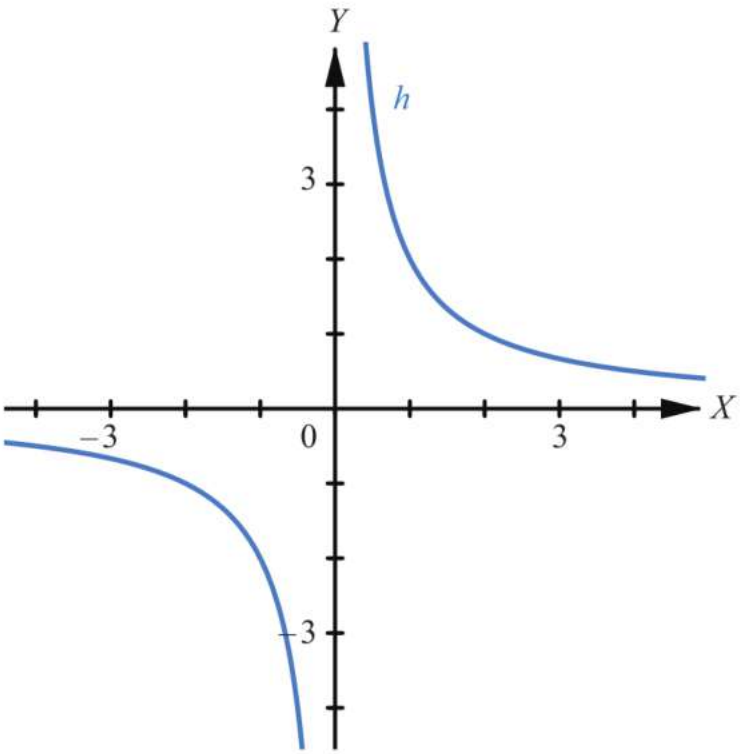
$$\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$$

$$h(x_1) > h(x_2)$$

ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0)$

เมื่อพิจารณา $h(x) = \frac{2}{x}$ บนช่วง $(0, \infty)$ ก็ได้ผลเช่นเดียวกัน

สรุปได้ว่า h เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0)$ และบนช่วง $(0, \infty)$

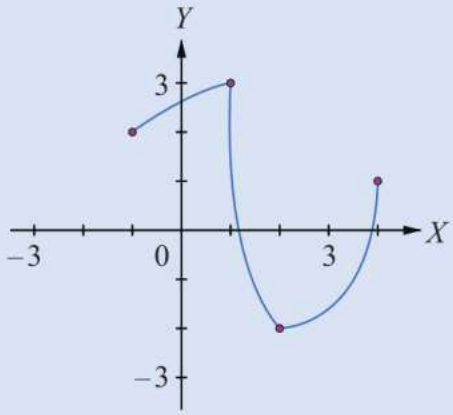


หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น ถึงแม้ว่า h จะเป็นฟังก์ชันลดทั้งบนช่วง $(-\infty,0)$ และบนช่วง $(0,\infty)$ แต่ h ไม่เป็นฟังก์ชันลดบน $D_h = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ เพราะว่า -2 และ 1 อยู่ในโดเมนของ h ซึ่ง 1 มากกว่า -2 แต่ $h(1)$ ไม่น้อยกว่า $h(-2)$

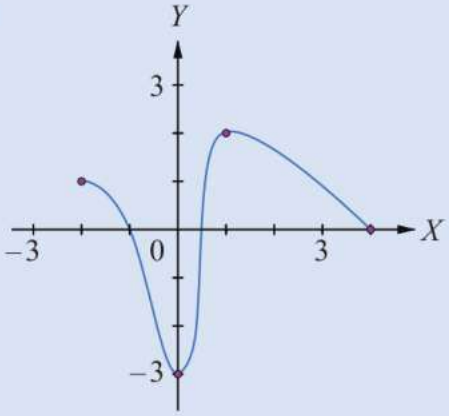
แบบฝึกหัด 1.2ข

1. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงหาช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด

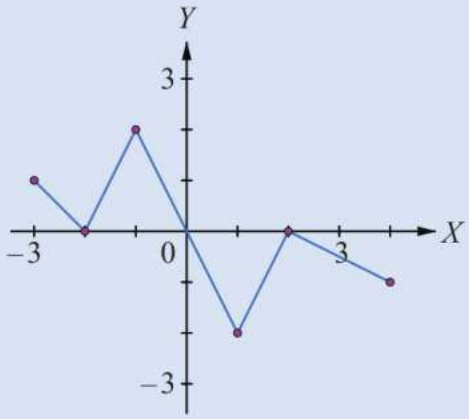
1)



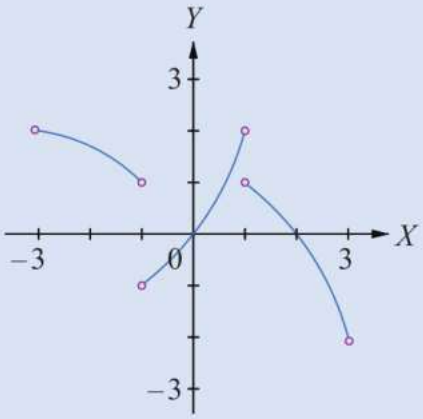
2)



3)



4)



2. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

1) $f(x)=-3x+7$ บนช่วง $(0,\infty)$
2) $f(x)=-x^2+5$ บนช่วง $(-\infty,0]$
3) $f(x)=|x|$ บนช่วง $[2,6]$
4) $f(x)=-\sqrt{x}$ บนช่วง $[0,5]$

1.3 การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงฟังก์ชันที่สำคัญบางชนิดที่นักเรียนรู้จักมาบ้างแล้ว และมีการนำไปใช้แก้ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตจริง

ฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=ax+b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นจะเป็นเส้นตรงในระบบพิกัดฉาก

ฟังก์ชัน $f(x)=ax+b$ เมื่อ $a=0$ จะได้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=b$ มีชื่อเรียกว่า **ฟังก์ชันคงตัว (constant function)**

ตัวอย่างที่ 21

พ่อค้าเปิดร้านขายอาหารกล่องเพื่อสุขภาพ มีต้นทุนสองส่วน ส่วนแรกคือค่าเช่าร้านเดือนละ $4,000$ บาท ส่วนที่สองคือต้นทุนวัตถุดิบกล่องละ 15 บาท พ่อค้าตั้งราคาขายไว้ที่กล่องละ 40 บาท จงหา

1) ฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตอาหารกล่อง x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
2) ฟังก์ชันรายได้จากการขายอาหารเพื่อสุขภาพ x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
3) พ่อค้าจะต้องขายอาหารกล่องเดือนละกี่กล่อง จึงจะคุ้มทุน

วิธีทำ 1) ให้ C แทนฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตอาหารกล่อง x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
เนื่องจากต้นทุนประกอบด้วยสองส่วนคือ ค่าเช่าร้านเดือนละ $4,000$ บาท
และต้นทุนวัตถุดิบ 15 บาทต่อกล่อง
ดังนั้น $C(x)=15x+4,000$

2) ให้ R แทนฟังก์ชันรายได้จากการขายอาหารกล่อง x กล่อง ในระยะเวลา 1 เดือน
เนื่องจากราคาขายอยู่ที่ 40 บาทต่อกล่อง
ดังนั้น $R(x)=40x$

3) จุดคุ้มทุนคือจุดที่รายได้เท่ากับต้นทุน นั่นคือ

$$\begin{aligned} R(x) &= C(x) \\ 40x &= 15x+4,000 \end{aligned}$$

$$25x = 4,000$$
$$x = 160$$

ดังนั้น พ่อค้าจะต้องขายอาหารกล่องเดือนละ 160 กล่อง จึงจะคุ้มทุน ■

ตัวอย่างที่ 22

ฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์ยี่ห้อหนึ่งเมื่อเวลาผ่านไปเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ถ้าปัจจุบันรถยนต์มีราคา 500,000 บาท และในอีก 5 ปีข้างหน้า รถยนต์จะมีราคา 350,000 บาท จงหา

1) ฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์เมื่อเวลาผ่านไป x ปี

2) เมื่อเวลาผ่านไปสองปี รถยนต์ยี่ห้อนี้จะมีราคาลดลงเหลือเท่าใด

วิธีทำ 1) ให้ $P(x) = mx + b$ เป็นฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์เมื่อเวลาผ่านไป x ปี โดย m และ b เป็นค่าคงตัว

จากโจทย์ $P(0) = 500,000$ และ $P(5) = 350,000$

จะได้ $b = 500,000$

และ $350,000 = 5m + 500,000$

$$m = \frac{350,000 - 500,000}{5}$$
$$= -30,000$$

ดังนั้น $P(x) = 500,000 - 30,000x$

2) เมื่อ $x = 2$ จะได้

$$P(2) = 500,000 - (30,000 \times 2)$$
$$= 440,000$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไปสองปี รถยนต์ยี่ห้อนี้จะมีราคาลดลงเหลือ 440,000 บาท ■

กิจกรรม : ชั่งน้ำหนัก

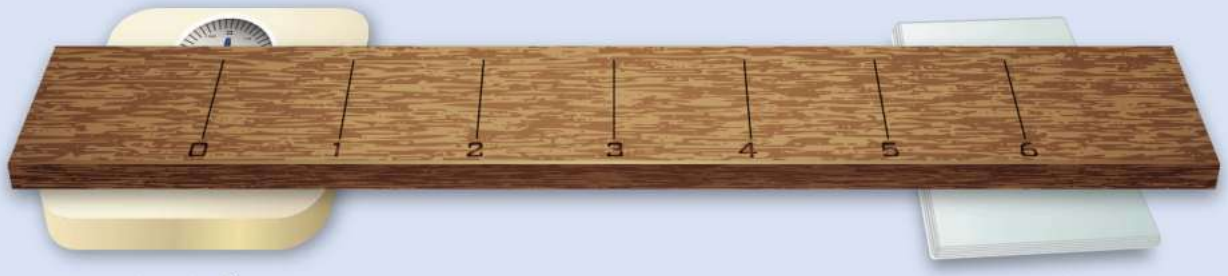
อุปกรณ์

1. เครื่องชั่งน้ำหนัก
2. แผ่นไม้ที่มีความยาวไม่น้อยกว่า 4 ฟุต และสามารถรับน้ำหนักคนที่ขึ้นไปยืนได้
3. ไม้บรรทัดและดินสอ
4. กองกระดาษที่มีความสูงเท่าเครื่องชั่งน้ำหนัก

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เตรียมแผ่นไม้โดยวัดระยะสำหรับยืนบนแผ่นไม้ ให้แต่ละตำแหน่งห่างกันครึ่งฟุต แล้วทำสัญลักษณ์และกำหนดหมายเลขแต่ละตำแหน่งให้เห็นอย่างชัดเจน ดังรูป

2. นำแผ่นไม้วางบนเครื่องชั่งน้ำหนัก โดยให้ตำแหน่งหมายเลข 0 บนแผ่นไม้อยู่กึ่งกลางของเครื่องชั่งน้ำหนัก จัดให้แผ่นไม้อยู่ในแนวขนานกับพื้นโดยใช้กองกระดาษรองที่ปลายอีกด้านหนึ่งของแผ่นไม้ และให้ตำแหน่งหมายเลข 6 อยู่ที่กึ่งกลางของกองกระดาษ ดังรูป เมื่อวางแผ่นไม้ลงบนเครื่องชั่งน้ำหนักแล้วปรับเครื่องชั่งน้ำหนักให้เข็มอยู่ที่ตำแหน่ง 0 กิโลกรัม



เครื่องชั่งน้ำหนัก

กองกระดาษที่มีความสูงเท่าเครื่องชั่งน้ำหนัก

3. ให้นักเรียนคนที่ 1 ชั่งน้ำหนัก โดยเริ่มยืนที่ตำแหน่งหมายเลข 0 อ่านตัวเลขแสดงน้ำหนักบนเครื่องชั่งแล้วบันทึกน้ำหนักที่อ่านได้ในตาราง หลังจากนั้นเลื่อนตำแหน่งที่ยืนไปเรื่อย ๆ ตามที่กำหนดจนถึงตำแหน่งหมายเลข 6 ซึ่งอยู่บนกองกระดาษ บันทึกน้ำหนักที่อ่านได้ในแต่ละตำแหน่ง ทำซ้ำแบบเดียวกันกับนักเรียนอีก 2 คน

ตำแหน่งที่ยืน	0	1	2	3	4	5	6
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 1							
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 2							
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 3							

4. นำข้อมูลที่บันทึกในข้อ 3 ไปเขียนกราฟ โดยให้แกน X แสดงตำแหน่งที่ยืน และแกน Y แสดงน้ำหนักที่อ่านได้ แล้วพิจารณาว่ากราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งที่ยืนกับน้ำหนักที่อ่านได้มีลักษณะอย่างไร

5. จากกราฟที่ได้ในข้อ 4
   5.1 เพราะเหตุใดกราฟทุกเส้นจึงมีความชันเป็นจำนวนลบ
   5.2 เพราะเหตุใดจุด (6, 0) จึงอยู่บนกราฟทุกเส้น
   5.3 การเปลี่ยนแปลงความยาวของแผ่นไม้น่าจะมีผลต่อความชันของกราฟหรือไม่ อย่างไร

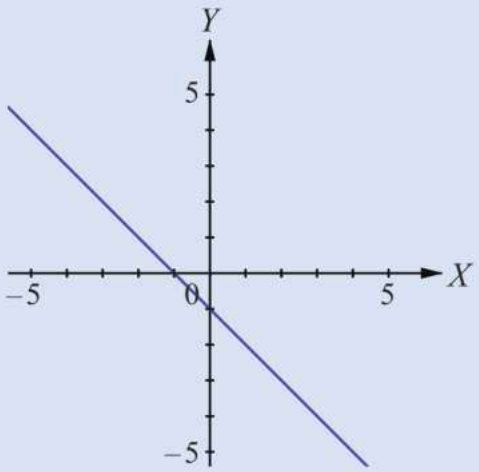
แบบฝึกหัด 1.3ก

1. จงจับคู่สมการกับกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

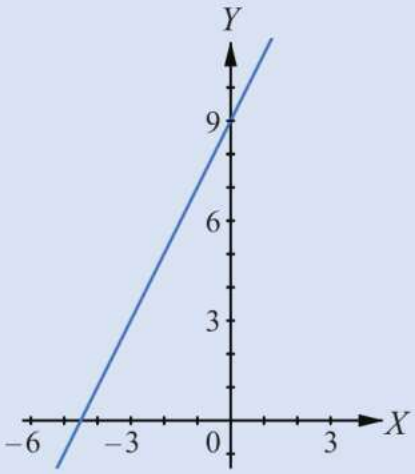
   1) $y = 2x + 9$

   2) $y = -1 - x$

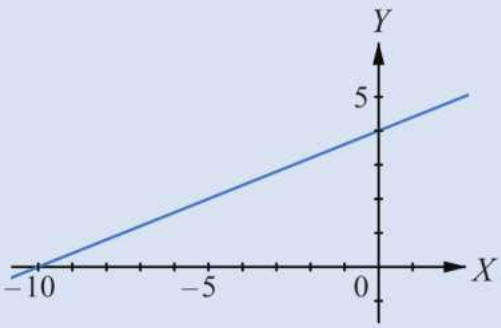
   3) $y = \frac{2}{5}x + 4$



(ก)



(ข)



(ค)

2. จงเขียนฟังก์ชันแทนสิ่งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ
   1) ค่าขนส่งสินค้าจากกรุงเทพฯ ไปยังจังหวัดที่อยู่ในเขตชายแดนภาคใต้ประกอบด้วยค่าขนส่งขั้นต้น 150 บาท กับค่าขนส่งที่คิดตามน้ำหนักสินค้ากิโลกรัมละ 5 บาท
   2) รายรับของพนักงานขายสินค้าของบริษัทแห่งหนึ่งประกอบด้วยเงินขั้นต้น 6,000 บาท รวมกับ 5% ของยอดขายสินค้า (บาท)

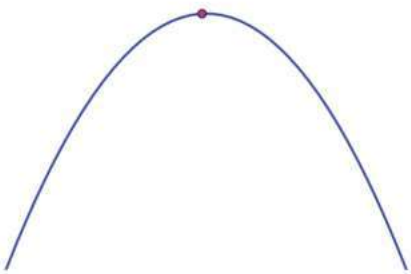
3. ในปี 2560 ยอดขายสินค้าชนิดใหม่ของบริษัทแห่งหนึ่งอยู่ที่ 12,000 ชิ้น ถ้าบริษัทต้องการให้ยอดขายสินค้าเพิ่มขึ้นปีละ 10% ของยอดขายในปี 2560
   1) จงเขียนฟังก์ชันแสดงยอดขายสินค้าเมื่อเวลาผ่านไป x ปี
   2) อีก 5 ปีข้างหน้า บริษัทนี้ควรจะมียอดขายสินค้าเท่าใด

ฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันขึ้นอยู่กับ a, b และ c เมื่อ a เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ จะทำให้ได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือคว่ำลง ตามลำดับ ดังรูปที่ 11ก และ 11ข

$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$

รูปที่ 11ก



$y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$

รูปที่ 11ข

จากรูปที่ 11ก และ 11ข จะเห็นว่า ถ้า $a > 0$ กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น
ถ้า $a < 0$ กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองมีชื่อเรียกว่า **พาราโบลา**

จุดวกกลับ คือ จุดยอดของพาราโบลา

ในกรณีที่ฟังก์ชันกำลังสองเขียนอยู่ในรูปของ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ การหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟทำได้โดยจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของ $y = a(x-h)^2 + k$ โดยอาศัยการจัดบางส่วนของสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อให้หาจุดวกกลับของกราฟหรือจุด (h, k) ได้ง่ายขึ้น ดังนี้

จาก $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

จะได้

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$$

$$\frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\frac{y}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ให้ $h = -\frac{b}{2a}$ และ $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ จะได้ $y = a(x-h)^2 + k$

กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ จะมีจุดวกกลับที่จุด $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

ให้ $y = f(x)$ จะได้ $f(h) = k$ ดังนั้น จึงอาจเขียนจุดวกกลับของ f ในรูป $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ ได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 23

จงเขียนกราฟของ $f(x)=x^2-2x-3$ พร้อมทั้งหา

1) โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f

2) จุดวกกลับของกราฟ

3) จุดวกกลับของกราฟเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดและมีค่าเท่าใด

4) จุดที่กราฟตัดแกน X

วิธีทำ จาก $f(x)=x^2-2x-3$

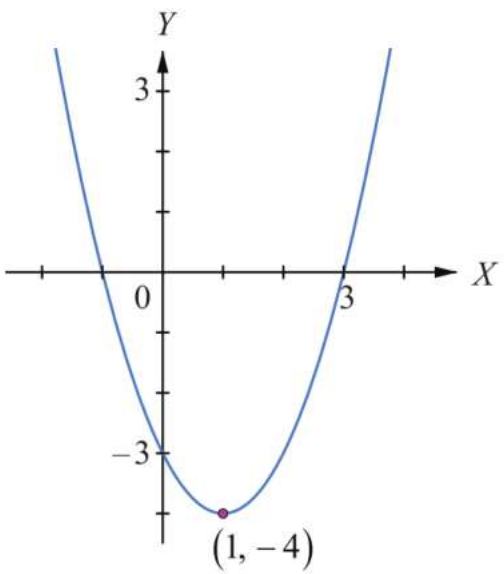
เขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2+k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2x+1-1-3 \\ &= (x-1)^2-4 \end{aligned}$$

จะได้ $a=1, h=1$ และ $k=-4$

เนื่องจาก $a>0$ ดังนั้น กราฟของ f จะหงายขึ้นและมีจุดวกกลับที่จุด $(1,-4)$

เขียนกราฟของ $f(x)=x^2-2x-3$ ได้ดังนี้



1) จากกราฟ พบว่า $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=\{y \mid y\geq -4\}$

2) กราฟมีจุดวกกลับที่จุด $(1,-4)$

3) จุดวกกลับของกราฟเป็นจุดที่ f มีค่าต่ำสุด และค่าต่ำสุดคือ -4

4) จากกราฟ พบว่า กราฟตัดแกน X สองจุด

หาจุดที่กราฟตัดแกน X โดยกำหนดให้ $y=0$

นั่นคือ $x^2-2x-3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x=3$ หรือ $x=-1$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(3,0)$ และ $(-1,0)$ ■

ตัวอย่างที่ 24

ชายคนหนึ่งโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศในแนวดิ่ง ถ้าความสูงจากพื้นดินของลูกบอลมีหน่วยเป็นฟุต ซึ่งหาได้จาก $f(t)=-t^2+2t+3$ เมื่อ t แทนระยะเวลาตั้งแต่เริ่มโยนลูกบอลมีหน่วยเป็นวินาที จงหาว่า
1) เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด ลูกบอลจะอยู่สูงที่สุดจากพื้นดิน และลูกบอลจะอยู่สูงจากพื้นดินเท่าใด
2) เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด ลูกบอลจึงตกถึงพื้นดิน

วิธีทำ 1) กราฟของ $y=ax^2+bx+c$ เมื่อ $a\neq 0$ จะมีจุดวกกลับ คือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

จาก $f(t)=-t^2+2t+3$

จะได้จุดวกกลับเมื่อ $t=-\frac{2}{2(-1)}=1$

และ $f(1)=-(1)^2+2(1)+3=4$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ลูกบอลจะอยู่สูงที่สุดและอยู่สูงจากพื้นดิน 4 ฟุต

2) เมื่อลูกบอลตกถึงพื้นดิน นั่นคือ $f(t)$ เท่ากับศูนย์

จะได้ $-t^2+2t+3 = 0$

$t^2-2t-3 = 0$

$(t-3)(t+1) = 0$

ดังนั้น $t=3$ หรือ $t=-1$

เนื่องจากระยะเวลาที่โยนลูกบอลขึ้นไปจนกระทั่งลูกบอลตกถึงพื้นดินจะต้องมากกว่าศูนย์
ดังนั้น ลูกบอลจะตกถึงพื้นดิน เมื่อโยนลูกบอลขึ้นไปนาน 3 วินาที ■

ตัวอย่างที่ 25

ให้ x แทนจำนวนนับ ซึ่งเมื่อนำมารวมกับจำนวนนับจำนวนที่สอง แล้วมีผลบวกเท่ากับ 30 จงหาผลคูณที่มากที่สุดของจำนวนนับทั้งสองจำนวน

วิธีทำ ให้ y แทนจำนวนนับจำนวนที่สอง จะได้ $x+y = 30$

$$y = 30-x$$

ผลคูณของจำนวนนับทั้งสอง คือ $x(30-x)$ หรือ $30x-x^2$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนลบ กราฟของ $f(x)=30x-x^2$ เมื่อ x แทนจำนวนจริง จะเป็นพาราโบลาคว่ำ แต่โจทย์กำหนดให้ x แทนจำนวนนับ

ดังนั้น กราฟจึงเป็นจุดบนพาราโบลา และจุดที่กราฟวกกลับเป็นจุดที่ผลคูณมีค่าสูงสุด

เขียนพหุนาม $30x-x^2$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อหาจุดวกกลับของกราฟได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 30x-x^2 &= -x^2+30x+225-225 \\ &= -(x^2-30x+225)+225 \\ &= -(x-15)^2+225 \end{aligned}$$

จาก $-(x-15)^2+225$ เมื่อเทียบกับ $a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=-1, h=15, k=225$

และจุด $(15, 225)$ เป็นจุดวกกลับของกราฟ

เนื่องจากจุดวกกลับเป็นจุดสูงสุดของกราฟ

ดังนั้น ผลคูณที่มากที่สุดของจำนวนนับทั้งสองจำนวน คือ 225 ■

ตัวอย่างที่ 26

จงหาค่าต่ำสุดของ x^2+y^2 เมื่อ $x+y=16$

วิธีทำ จาก $x+y=16$ จะได้ $y=16-x$

เขียน x^2+y^2 ให้อยู่ในรูปของ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(16-x)^2 \\ &= 2x^2-32x+256 \end{aligned}$$

พิจารณา $f(x)=2x^2-32x+256$

พบว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนบวก ดังนั้น จุดวกกลับของกราฟของ $f(x)=2x^2-32x+256$ จะเป็นจุดที่ $f(x)$ มีค่าต่ำสุดและพิกัดของจุดวกกลับของกราฟของ $f(x)=ax^2+bx+c$ มี $-\frac{b}{2a}$ เป็นสมาชิกตัวหน้า

จาก $f(x)=2x^2-32x+256$ จะได้ $a=2$ และ $b=-32$

ดังนั้น สมาชิกตัวหน้าของพิกัดของจุดวกกลับ คือ $-\frac{(-32)}{2(2)}=8$

เนื่องจาก $f(8)=2(8)^2-32(8)+256=128$

ดังนั้น พิกัดของจุดวกกลับของกราฟ คือ $(8,128)$

จะได้ว่า เมื่อ $x+y=16$ ค่าต่ำสุดของ x^2+y^2 คือ 128 ■

ตัวอย่างของฟังก์ชันที่กล่าวมานี้เป็นเพียงฟังก์ชันพื้นฐานที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน โดยฟังก์ชันคงตัว ฟังก์ชันเชิงเส้น และฟังก์ชันกำลังสองเป็นกรณีเฉพาะของฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function)

ฟังก์ชันพหุนาม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างของฟังก์ชันพหุนาม เช่น

$f(x)=1$

$f(x)=2x+5$

$f(x)=x^3$

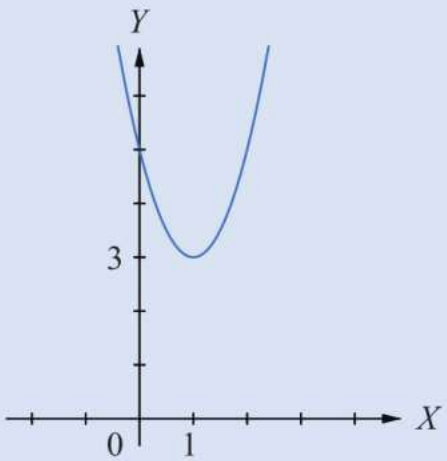
$f(x)=x^4+x^2-x+4$

ฟังก์ชันพหุนามจะต้องมีจำนวนพจน์เป็นจำนวนจำกัด อาจมี $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนจริง ซึ่งจะเรียกว่าฟังก์ชันพหุนามบนเซตของจำนวนเต็ม ฟังก์ชันพหุนามบนเซตของจำนวนตรรกยะ หรือฟังก์ชันพหุนามบนเซตของจำนวนจริง ตามลำดับ

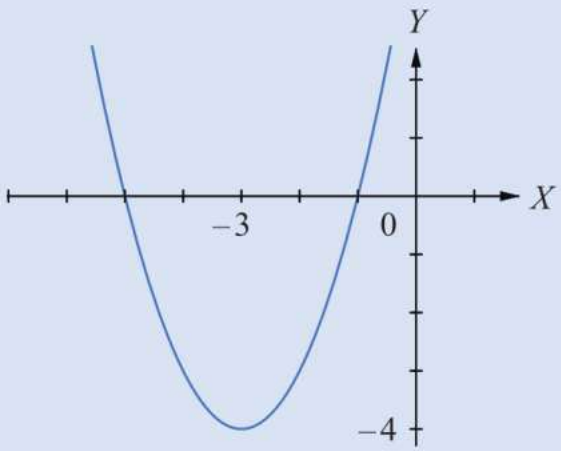
แบบฝึกหัด 1.3ข

1. จงจับคู่สมการและกราฟที่กำหนดให้

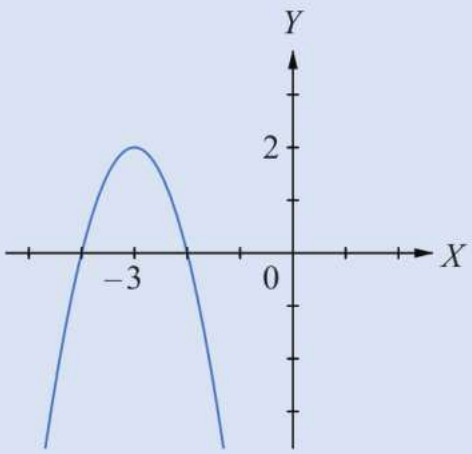
1) $y=(x-4)^2-3$
2) $y=-(x-4)^2+3$
3) $y=(x+4)^2-3$
4) $y=-(x+4)^2+3$
5) $y=2(x-2)^2$
6) $y=(x+3)^2-4$
7) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-3$
8) $y=-2(x+3)^2+2$
9) $y=x^2-2x+3$
10) $y=2x^2-4x+5$



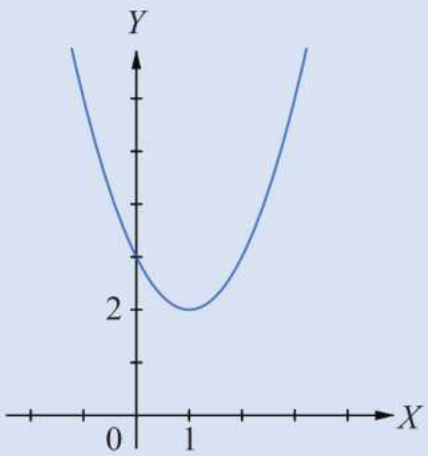
(ก)



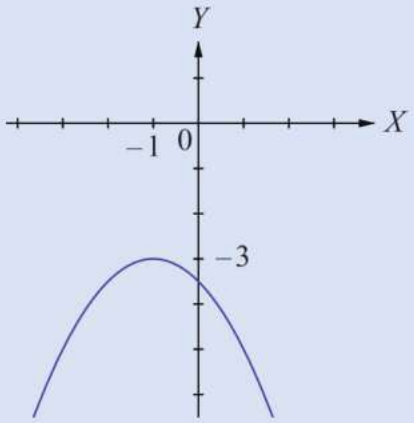
(ข)



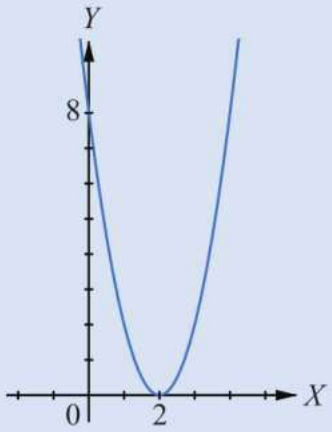
(ค)



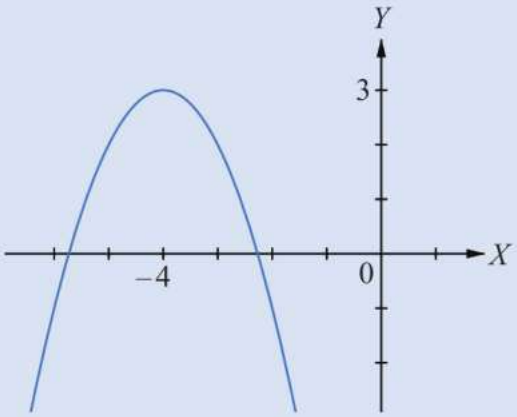
(ง)



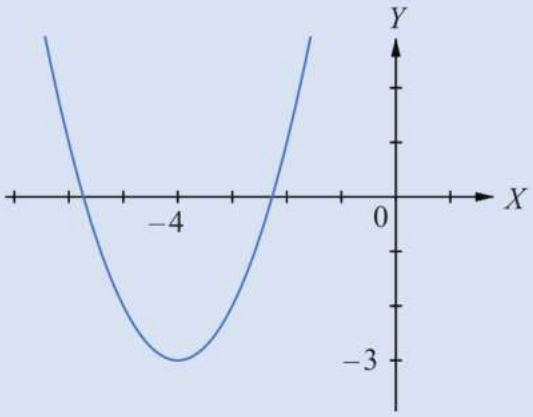
(จ)



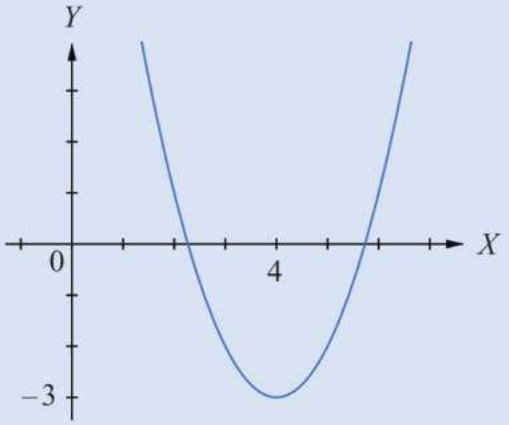
(ฉ)



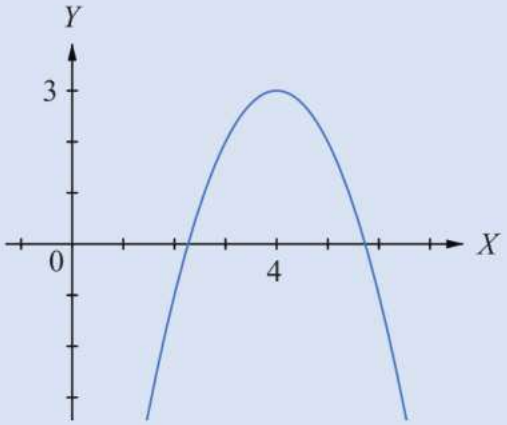
(ช)



(ซ)



(ฌ)



(ญ)

2. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จุดที่กราฟตัดแกน X และจุดวกกลับของกราฟ และหาว่าจุดวกกลับของกราฟเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และมีค่าเท่าใด

1) $y = x^2 - 4x - 5$ 2) $y = -x^2 + 6x - 8$

3) $y = -x^2 - 2x$ 4) $y = x^2 - 6x + 8$

3. ถ้ารายได้เฉลี่ยจากการขายสินค้า (ต่อชิ้น) หลังหักค่าใช้จ่ายแล้วเท่ากับ $100 - 0.1x$ บาท เมื่อ x แทนจำนวนสินค้าที่ขายได้

1) จงเขียนสมการแสดงรายได้จากการขายสินค้า x ชิ้น
2) จงหาว่าจะต้องขายสินค้ากี่ชิ้น จึงจะมีรายได้มากที่สุด และมีรายได้มากที่สุดเท่าใด

4. เจ้าของหอพักแห่งหนึ่งมีห้องพักสำหรับให้เช่า 80 ห้อง เขาพบว่า ถ้าคิดค่าเช่าห้องละ 4,000 บาทต่อเดือน จะมีผู้พักเต็มทุกห้อง แต่ถ้าเพิ่มค่าเช่าห้องพักเป็นห้องละ 4,200 บาท จะมีห้องว่าง 1 ห้อง และถ้าเพิ่มค่าเช่าห้องพักเป็นห้องละ 4,400 บาท จะมีห้องว่าง 2 ห้อง โดยจำนวนห้องว่างจะเพิ่มขึ้น 1 ห้อง เมื่อเพิ่มค่าเช่าอีกห้องละ 200 บาท

1) จงเขียนสมการแสดงรายได้ของเจ้าของหอพักแห่งนี้
2) ถ้าต้องการให้มีรายได้เดือนละ 375,000 บาท เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละเท่าใด
3) เจ้าของหอพักต้องตั้งราคาเช่าห้องละเท่าใด จึงจะทำให้มีรายได้มากที่สุด และมีรายได้มากที่สุดเท่าใด

5. ให้จำนวนนับสองจำนวนมีผลบวกเป็น 45 และผลคูณเป็น 164 ถ้าจำนวนนับจำนวนหนึ่งเป็น x จงหาว่า x มากที่สุดเป็นเท่าใด

6. จงหาค่ามากที่สุดของ xy^2 เมื่อ $x + y^2 = 6$

1.4 กราฟของฟังก์ชัน

กราฟของฟังก์ชัน คือ กราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดโดยสมการ $y=f(x)$ ในระบบพิกัดฉาก ซึ่งจะประกอบด้วยจุดที่มีคู่อันดับเป็น (x,y) โดยที่สมาชิกตัวหน้าคือ x เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน และสมาชิกตัวหลังคือ y หรือ $f(x)$ เป็นค่าของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ x

ในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน อาจทำได้โดยคำนวณหาคู่อันดับที่อยู่บนกราฟให้มากเพียงพอ แล้วลากเส้นโค้ง (หรือเส้นตรง) เชื่อมจุดเหล่านั้น ถ้าทราบพิกัดของคู่อันดับที่อยู่บนกราฟมากเท่าใด ก็จะช่วยให้เขียนกราฟได้ถูกต้องมากขึ้นเท่านั้น

สิ่งสำคัญที่ควรพิจารณาในการเขียนกราฟ คือจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y กราฟจะตัดแกน X เมื่อค่าของ y ในคู่อันดับเท่ากับ 0 และกราฟจะตัดแกน Y เมื่อค่าของ x ในคู่อันดับเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 27

จงเขียนกราฟของ $f(x)=x^3-4x$

วิธีทำ ให้ $y=f(x)=x^3-4x$

กราฟตัดแกน Y เมื่อ $x=0$ จะได้ $y=0$

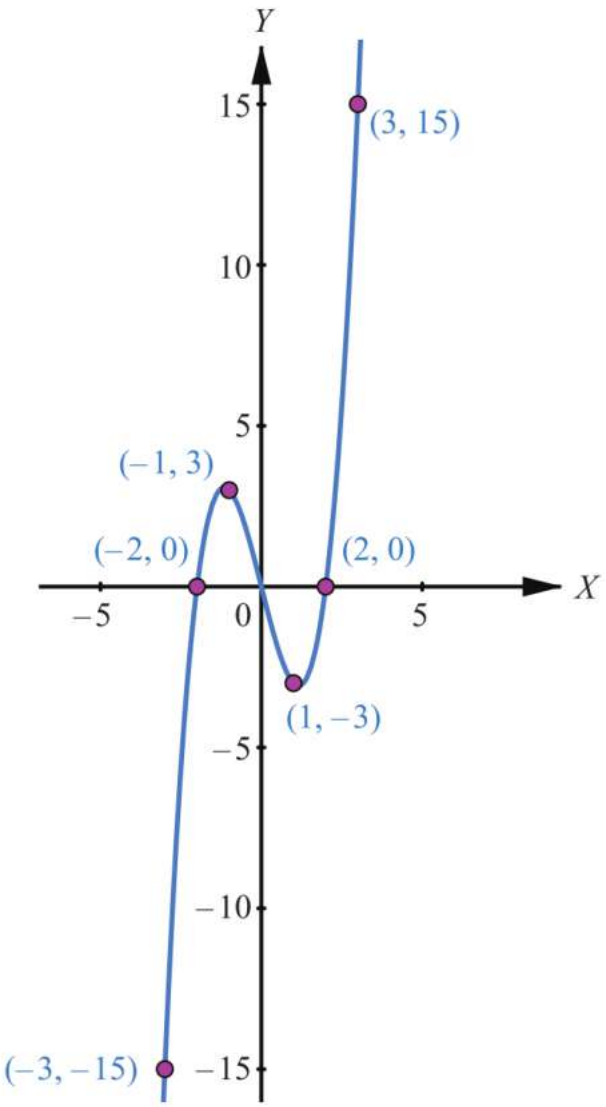
ดังนั้น กราฟตัดแกน Y ที่จุด $(0,0)$

กราฟตัดแกน X เมื่อ $y=0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} x^3-4x &= 0 \\ x(x-2)(x+2) &= 0 \\ x=0 \text{ หรือ } x=2 &\text{ หรือ } x=-2 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุดสามจุด คือ $(0,0),(2,0)$ และ $(-2,0)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-15	0	3	0	-3	0	15

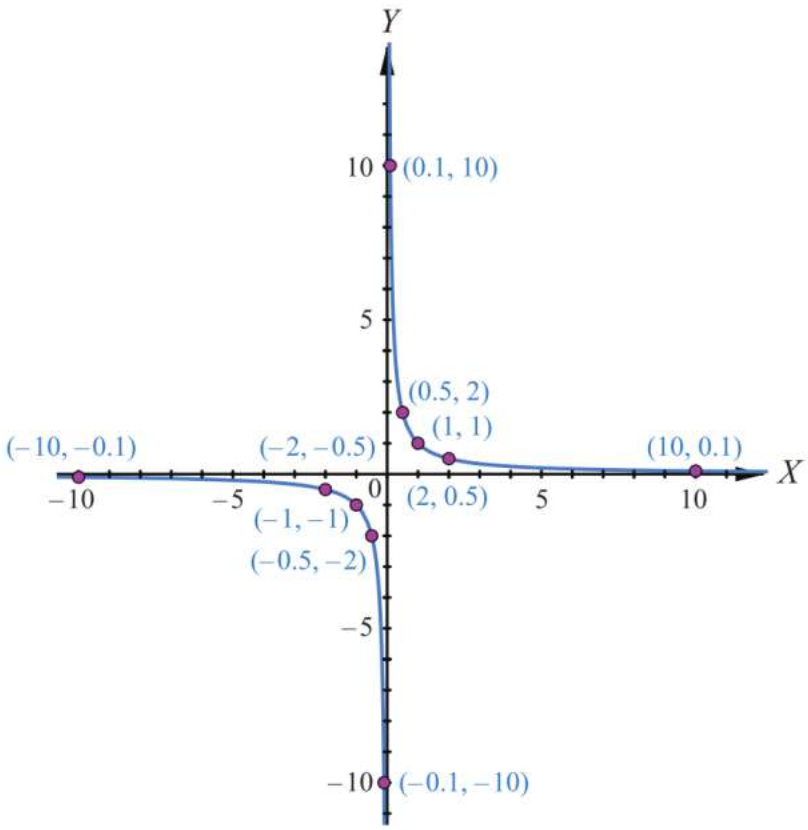


ตัวอย่างที่ 28

จงเขียนกราฟของ $f(x)=\frac{1}{x}$ และจงพิจารณาว่ากราฟตัดแกน X และแกน Y หรือไม่

วิธีทำ ให้ $y=f(x)=\frac{1}{x}$

x	-10	-2	-1	-0.5	-0.1	0.1	0.5	1	2	10
y	-0.1	-0.5	-1	-2	-10	10	2	1	0.5	0.1



เมื่อ $x>0$ กราฟจะเข้าใกล้แกน X มากขึ้น เมื่อ x มากขึ้นเรื่อย ๆ
และกราฟจะเข้าใกล้แกน Y ทางบวกมากขึ้น เมื่อ x เข้าใกล้ 0

เมื่อ $x<0$ กราฟจะเข้าใกล้แกน X มากขึ้น เมื่อ x ลดลงเรื่อย ๆ
และกราฟจะเข้าใกล้แกน Y ทางลบมากขึ้น เมื่อ x เข้าใกล้ 0

แต่กราฟไม่ตัดแกน X และแกน Y ■

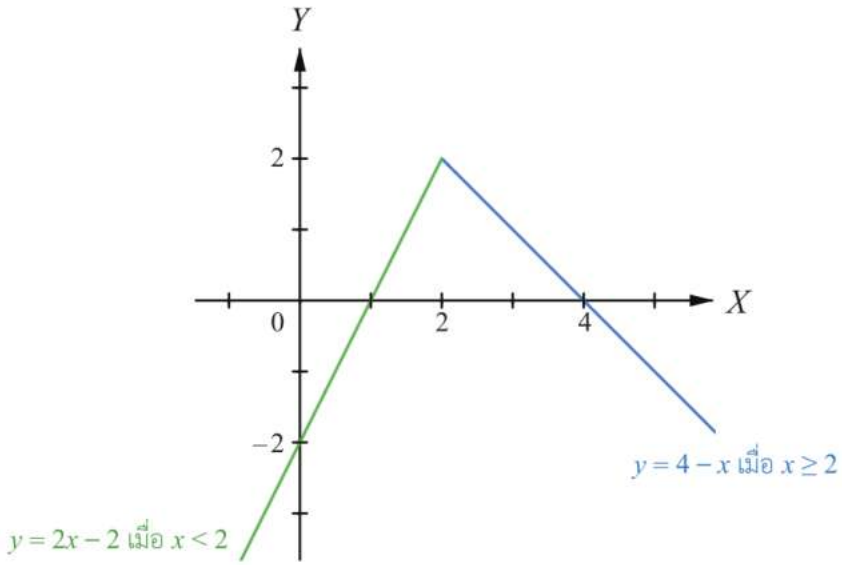
ตัวอย่างที่ 29

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}4-x, & x\geq 2\\ 2x-2, & x<2\end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก ฟังก์ชัน f กำหนดค่าบนช่วงสองช่วง ดังนั้น กราฟของ f ประกอบด้วยสองส่วน คือ

1. กราฟของเส้นตรง $y=4-x$ เมื่อ $x\geq 2$
2. กราฟของเส้นตรง $y=2x-2$ เมื่อ $x<2$

เขียนกราฟของ f ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 30

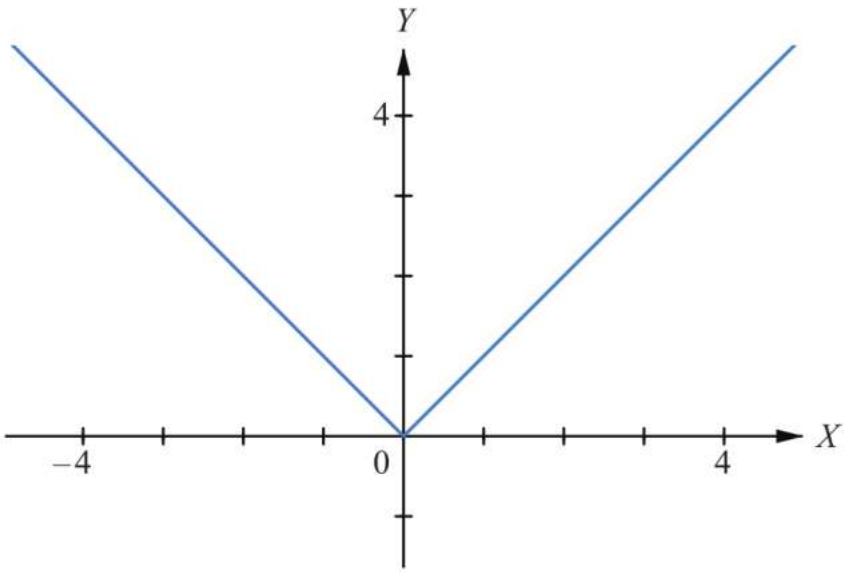
จงเขียนกราฟของ $f(x)=|x|$

วิธีทำ จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

ดังนั้น กราฟของ $f(x)=|x|$ ประกอบด้วยสองส่วน คือ

1. กราฟของเส้นตรง $y=x$ เมื่อ $x\geq 0$
2. กราฟของเส้นตรง $y=-x$ เมื่อ $x<0$

เขียนกราฟของ f ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 31

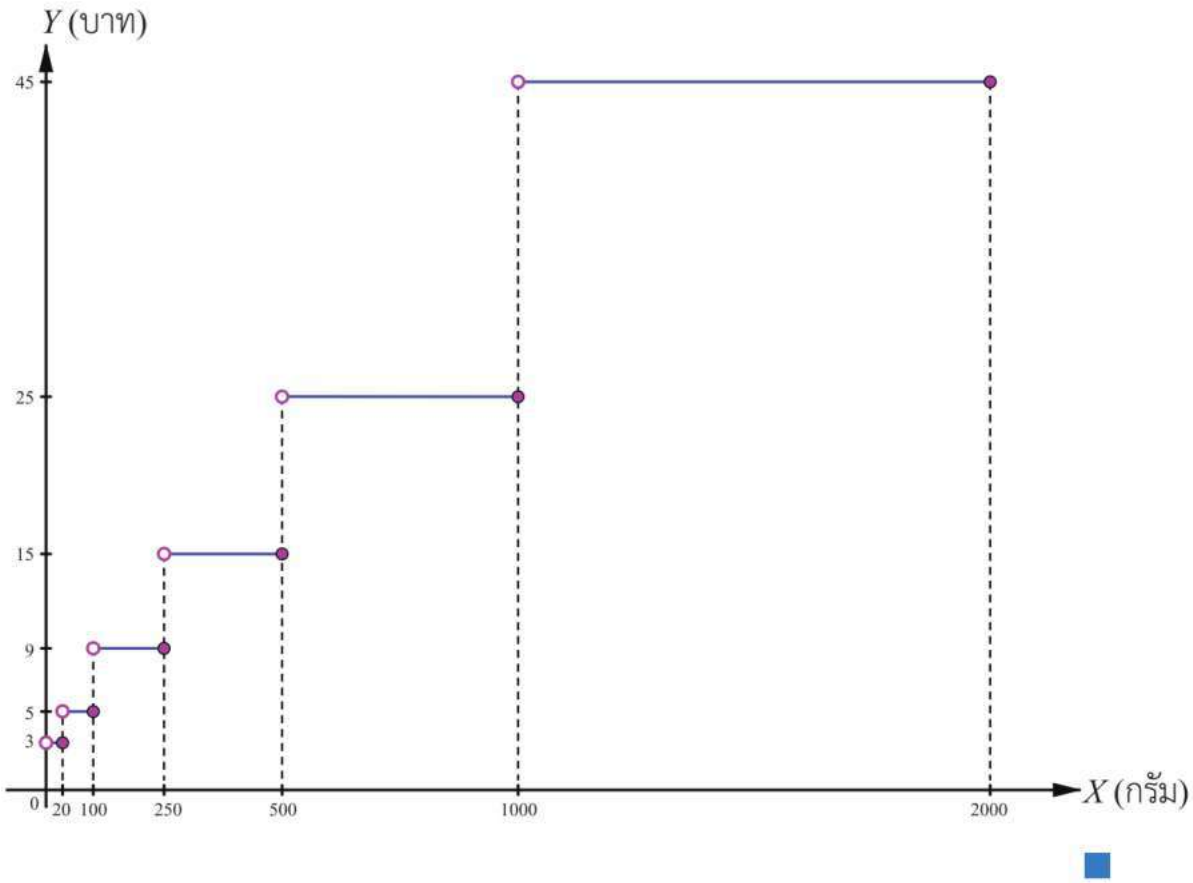
จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการในการส่งจดหมายในประเทศ (ไปรษณีย์ธรรมดา) ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 20 กรัม	3.00
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	5.00
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม	9.00
เกิน 250 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	15.00
เกิน 500 กรัม แต่ไม่เกิน 1,000 กรัม	25.00
เกิน 1,000 กรัม แต่ไม่เกิน 2,000 กรัม	45.00

วิธีทำ เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนน้ำหนักของจดหมาย (กรัม) และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งจดหมายในประเทศ (บาท) ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases}3.00 & ;0<x\le 20\\ 5.00 & ;20<x\le 100\\ 9.00 & ;100<x\le 250\\ 15.00 & ;250<x\le 500\\ 25.00 & ;500<x\le 1{,}000\\ 45.00 & ;1{,}000<x\le 2{,}000\end{cases}$$

เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้ (เส้นประขนานกับแกน Y เขียนไว้เพื่อช่วยให้อ่านกราฟได้ชัดเจนยิ่งขึ้น แต่มิใช่ส่วนหนึ่งของกราฟ)



ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และโดเมนถูกแบ่งออกเป็นช่วงย่อยมากกว่าหนึ่งช่วง โดยค่าของฟังก์ชันในแต่ละช่วงย่อยเป็นค่าคงตัวที่เป็นลำดับเพิ่ม หรือลำดับลดอย่างใดอย่างหนึ่ง เรียกว่า ฟังก์ชันขั้นบันได (step function) โดยกราฟของฟังก์ชันนี้มีลักษณะคล้ายขั้นบันได

ตัวอย่างของฟังก์ชันขั้นบันไดที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน ได้แก่ อัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย หรือพัสดุ

แบบฝึกหัด 1.4ก

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์

   1) $f(x)=x^3+1$

   2) $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\geq 1 \\ x^2-1, & x<1 \end{cases}$

   3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

   4) $f(x)=|x+2|$

2. จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการในการส่งพัสดุของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 1 กิโลกรัม	20.00
เกิน 1 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 2 กิโลกรัม	35.00
เกิน 2 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 3 กิโลกรัม	50.00
เกิน 3 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 4 กิโลกรัม	65.00
เกิน 4 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 5 กิโลกรัม	80.00
เกิน 5 กิโลกรัม แต่ไม่เกิน 6 กิโลกรัม	95.00

3. จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย (ไปรษณีย์ลงทะเบียน) ของบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งกำหนดอัตราค่าบริการ ดังนี้

พิกัดน้ำหนัก	ค่าบริการ (บาท)
ไม่เกิน 20 กรัม	16.00
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	18.00
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม	22.00
เกิน 250 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	28.00
เกิน 500 กรัม แต่ไม่เกิน 1,000 กรัม	38.00

เทคนิคการเขียนกราฟโดยการเลื่อนกราฟ

บางครั้งการเขียนกราฟของฟังก์ชันสามารถทำได้โดยการเลื่อนกราฟของฟังก์ชันที่รู้จักขนานกับแกนพิกัด ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะการเลื่อนขนานในแนวตั้งและการเลื่อนขนานในแนวนอน

การเลื่อนขนานในแนวตั้ง

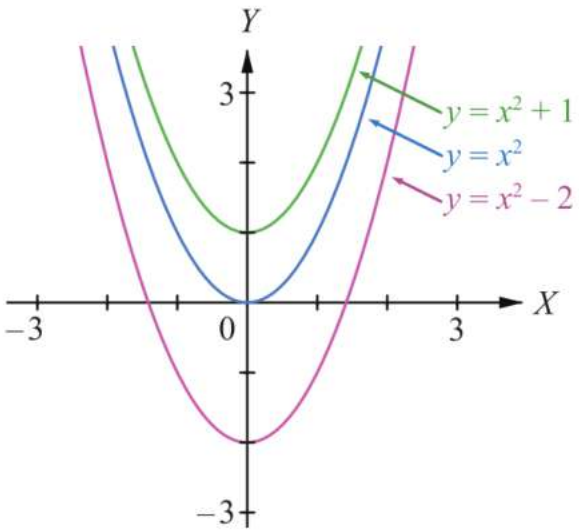
เมื่อเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 1$$

$$y = x^2 - 2$$

จะได้กราฟดังรูปที่ 12

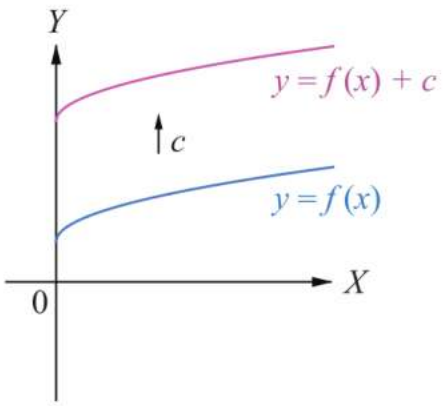


รูปที่ 12

ลองพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟเหล่านี้ ถ้าใช้กราฟของ $y = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง กราฟของ $y = x^2 + 1$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่สูงขึ้นไป 1 หน่วย หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า กราฟของ $y = x^2 + 1$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $y = x^2$ ขึ้น 1 หน่วย ในทำนองเดียวกัน กราฟของ $y = x^2 - 2$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่เกิดจากการเลื่อนลง 2 หน่วย

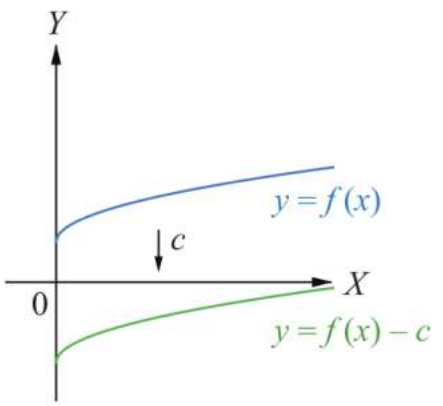
ในกรณีทั่วไป สมมติว่าทราบกราฟของ $y=f(x)$ จะเขียนกราฟของ $y=f(x)+c$ และ $y=f(x)-c$ เมื่อ $c>0$ จากกราฟของ $y=f(x)$ ได้ เนื่องจากสมการ $y=f(x)+c$ เมื่อ $c>0$ บอกให้ทราบว่า สำหรับแต่ละค่าของ x ค่า y ของพิกัดของจุดบนกราฟของ $y=f(x)+c$ มากกว่าค่า y ของพิกัดของจุดบนกราฟของ $y=f(x)$ อยู่ c ดังนั้น กราฟของ $y=f(x)+c$ ได้จากการเลื่อนกราฟของ $y=f(x)$ ขึ้น c หน่วย ดังรูปที่ 13ก ในทำนองเดียวกัน สามารถเขียนกราฟของ $y=f(x)-c$ เมื่อ $c>0$ โดยเลื่อนกราฟของ $y=f(x)$ ลง c หน่วย ดังรูปที่ 13ข

สมการ	วิธีเขียนกราฟ
$y=f(x)+c, c>0$	เลื่อนกราฟของ $y=f(x)$ ขึ้น c หน่วย



รูปที่ 13ก

$y=f(x)-c, c>0$	เลื่อนกราฟของ $y=f(x)$ ลง c หน่วย

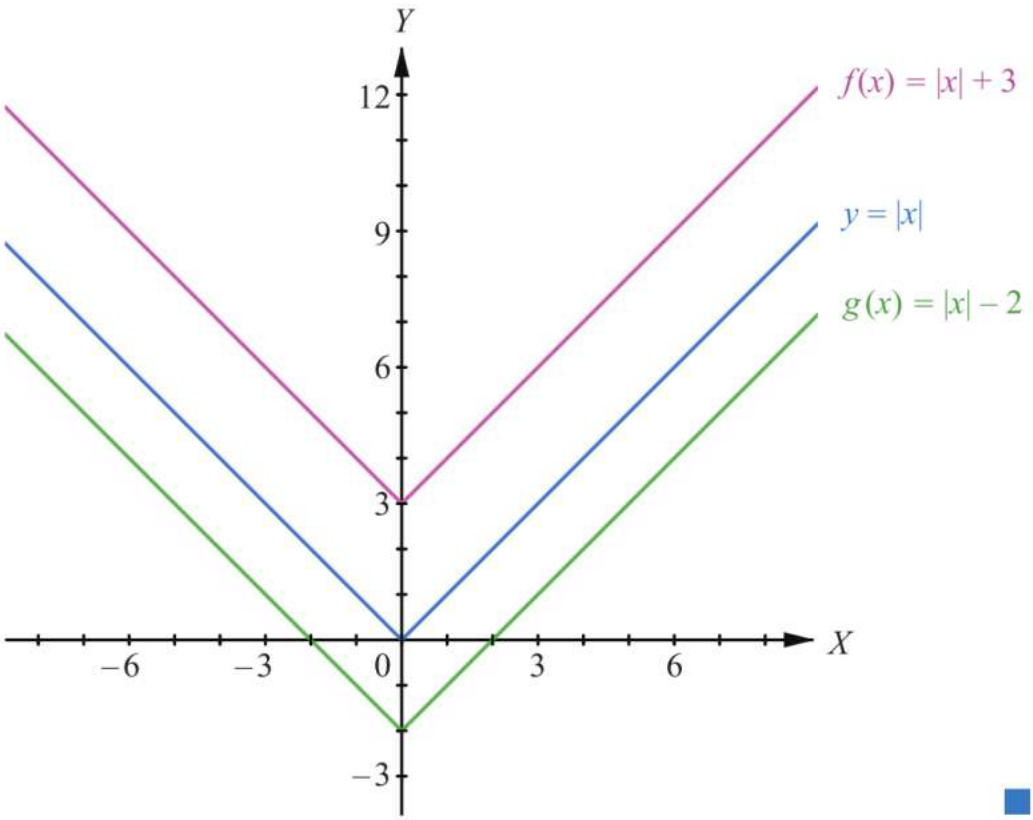


รูปที่ 13ข

ตัวอย่างที่ 32

จงเขียนกราฟของ $f(x) = |x| + 3$ และ $g(x) = |x| - 2$

วิธีทำ กราฟของ $y = |x|$ เลื่อนขึ้น 3 หน่วย จะได้กราฟของ f
และกราฟของ $y = |x|$ เลื่อนลง 2 หน่วย จะได้กราฟของ g ดังรูป

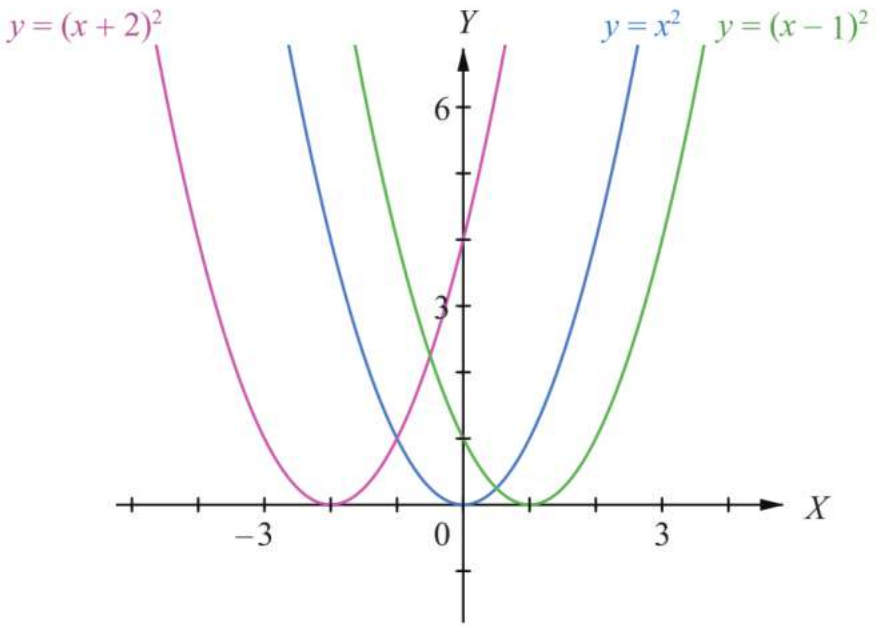


การเลื่อนขนานในแนวนอน

เมื่อเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

$$y = x^2$$
$$y = (x-1)^2$$
$$y = (x+2)^2$$

จะได้กราฟดังรูปที่ 14

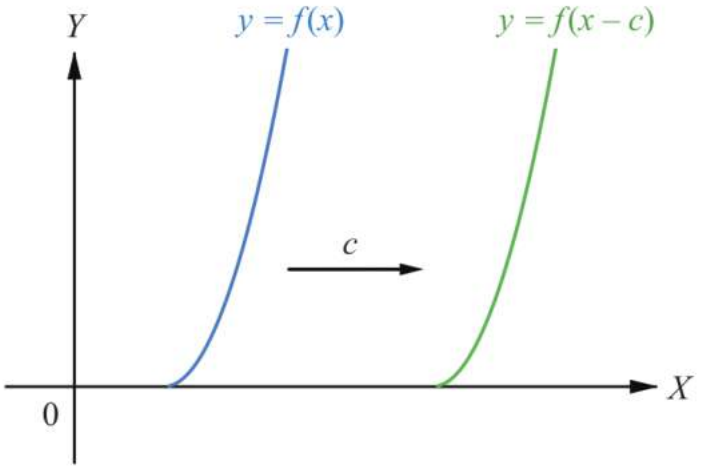


รูปที่ 14

ลองพิจารณาความสัมพันธ์ของกราฟเหล่านี้ ถ้าใช้กราฟของ $y = x^2$ เป็นหลักในการอ้างอิง กราฟของ $y = (x-1)^2$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่อยู่ในตำแหน่งที่เลื่อนไปทางขวา 1 หน่วย ในทำนองเดียวกัน กราฟของ $y = (x+2)^2$ มีรูปร่างเหมือนกับกราฟของ $y = x^2$ แต่เกิดจากการเลื่อนไปทางซ้าย 2 หน่วย

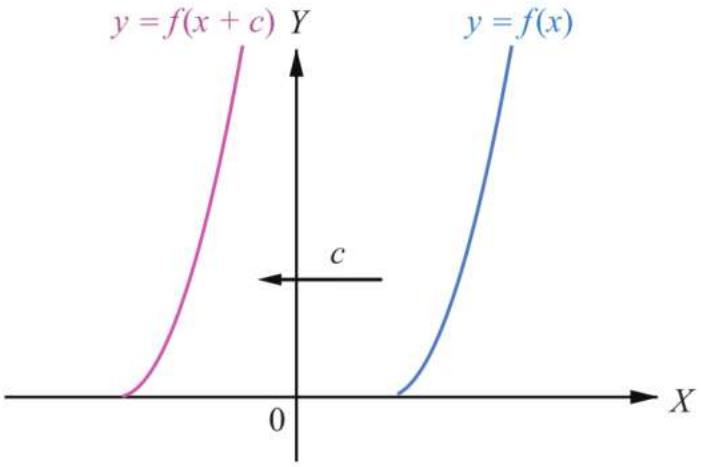
ในกรณีทั่วไป สมมติว่าทราบกราฟของ $y = f(x)$ จะเขียนกราฟของ $y = f(x+c)$ และ $y = f(x-c)$ เมื่อ $c > 0$ จากกราฟของ $y = f(x)$ ได้ เนื่องจากค่าของ $f(x-c)$ ที่ $x+c$ เท่ากับค่าของ $f(x)$ ที่ x ดังนั้น กราฟของ $y = f(x-c)$ คือ กราฟของ $y = f(x)$ ที่เลื่อนไปทางขวา c หน่วย ดังรูปที่ 15ก ในทำนองเดียวกัน กราฟของ $y = f(x+c)$ คือ กราฟของ $y = f(x)$ ที่เลื่อนไปทางซ้าย c หน่วย ดังรูปที่ 15ข

สมการ	วิธีเขียนกราฟ
$y = f(x-c), c>0$	เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางขวา c หน่วย



รูปที่ 15ก

$y = f(x+c), c>0$	เลื่อนกราฟของ $y = f(x)$ ไปทางซ้าย c หน่วย

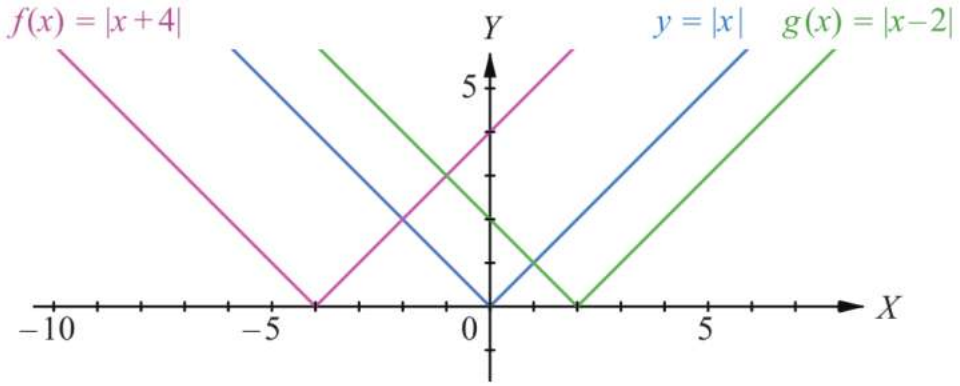


รูปที่ 15ข

ตัวอย่างที่ 33

จงเขียนกราฟของ $f(x)=|x+4|$ และ $g(x)=|x-2|$

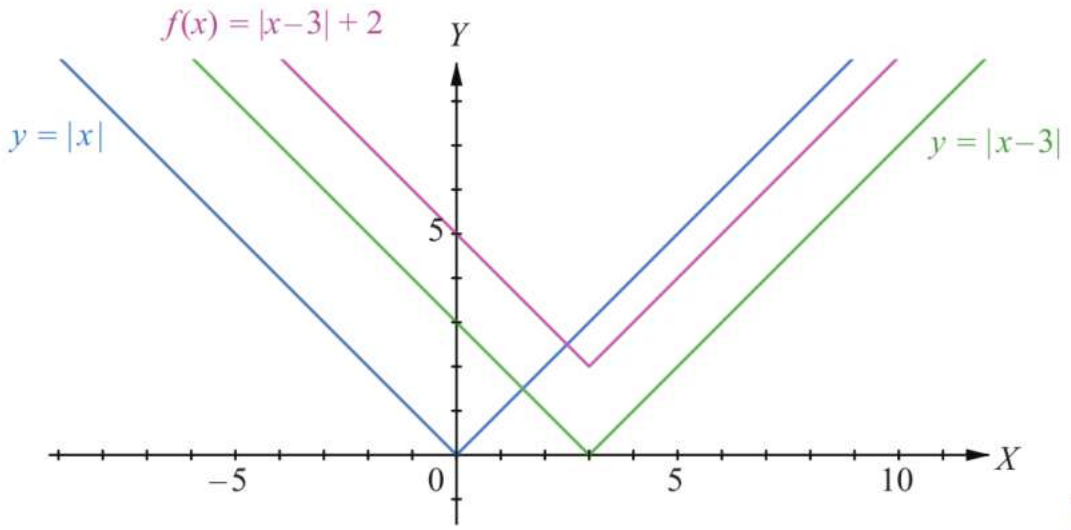
วิธีทำ กราฟของ $y=|x|$ เลื่อนไปทางซ้าย 4 หน่วย จะได้กราฟของ f และกราฟของ $y=|x|$ เลื่อนไปทางขวา 2 หน่วย จะได้กราฟของ g ดังรูป



ตัวอย่างที่ 34

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=|x-3|+2$

วิธีทำ กราฟของ $y=|x|$ เลื่อนไปทางขวา 3 หน่วย จะได้กราฟของ $y=|x-3|$ แล้วเลื่อนกราฟของ $y=|x-3|$ ขึ้น 2 หน่วย จะได้กราฟของ $f(x)=|x-3|+2$ ดังรูป



แบบฝึกหัด 1.4ข

1. จงเขียนกราฟของแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้การเลื่อนขนานในแนวตั้งหรือแนวนอน

   1) $f(x)=x^2-3$
   2) $g(x)=(x+2)^2-3$
   3) $h(x)=\sqrt{x-3}$
   4) $k(x)=\sqrt{x+1}+3$
   5) $r(x)=|x-2|-5$
   6) $s(x)=|x+3|+5$

2. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ กำหนดฟังก์ชัน f และวิธีการเลื่อนกราฟของ f จงเขียนกราฟและสมการของกราฟที่ได้ในขั้นสุดท้าย

   1) $f(x)=x^2$, เลื่อนกราฟขึ้น 2 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางขวาอีก 3 หน่วย
   2) $f(x)=x^3$, เลื่อนกราฟลง 1 หน่วย แล้วเลื่อนไปทางซ้ายอีก 5 หน่วย
   3) $f(x)=|x|$, เลื่อนกราฟไปทางขวา $\frac{1}{2}$ หน่วย แล้วเลื่อนกราฟลง 2 หน่วย
   4) $f(x)=|x|$, เลื่อนกราฟไปทางซ้าย 1 หน่วย แล้วเลื่อนกราฟขึ้น 5 หน่วย

1.5 การดำเนินการของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ จะศึกษาวิธีสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันเดิมที่มีอยู่ โดยฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง สามารถบวก ลบ คูณ และหารกันได้คล้ายกับจำนวนจริง เช่น สมมติว่า พลอยรับจ้างนำเสื้อไปขายที่ตลาดนัด โดยได้รับค่าจ้างครั้งละ 1,000 บาท รวมกับส่วนแบ่งจากค่าเสื้อที่ขายได้ตัวละ 50 บาท ดังนั้น รายได้ของพลอยขึ้นอยู่กับจำนวนเสื้อที่ขายได้ ให้ x แทนจำนวนเสื้อที่ขายได้ จะได้ $R(x)=50x+1,000$ แทนรายได้ทั้งหมดของพลอย ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x แต่ในการทำงานนี้พลอยต้องใช้รถยนต์ของตนเองในการเดินทาง โดยเสียค่าน้ำมันเชื้อเพลิงครั้งละ 250 บาท และส่วนแบ่งจากค่าเสื้อที่ขายได้เป็นค่าจ้างน้องมาช่วยขายอีกตัวละ 20 บาท สามารถเขียนค่าใช้จ่ายในรูปฟังก์ชันของจำนวนเสื้อที่ขายได้เป็น $C(x)=20x+250$ ซึ่งเมื่อหักค่าใช้จ่ายออกจากรายได้แล้วจะมีกำไร

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)-C(x) \\ &= (50x+1,000)-(20x+250) \\ &= 30x+750 \end{aligned}$$

สังเกตว่า กำไร $P(x)$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนเสื้อที่ขายได้ x ตัว

ตัวอย่างนี้แสดงวิธีสร้างฟังก์ชันใหม่ที่ได้จากผลต่างระหว่างฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ในกรณีทั่วไป มีวิธีการดำเนินการพื้นฐานเชิงพีชคณิตระหว่างฟังก์ชัน 4 แบบ ดังนี้

บทนิยาม 11

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ **ผลบวก (sum) ผลต่าง (difference) ผลคูณ (product)** และ**ผลหาร (quotient)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f+g, f-g, fg$ และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{เมื่อ } g(x)\neq 0 \end{aligned}$$

โดเมนของ $f+g$, $f-g$ และ fg คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่อยู่ทั้งในโดเมนของ f และโดเมนของ g ซึ่งก็คือ $D_f \cap D_g$

สำหรับโดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่อยู่ทั้งในโดเมนของ f และ โดเมนของ g โดยที่ $g(x)$ ต้องไม่เท่ากับ 0 ด้วย ซึ่งก็คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\}$

ตัวอย่างที่ 35

ให้ $f(x)=x^3+1$ และ $g(x)=\sqrt{x}$

1) จงหา $f+g,\ f-g,\ fg$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

2) จงหา $(f+g)(1),\ (f-g)(1),\ (fg)(2)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$

วิธีทำ 1) เนื่องจากโดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $[0,\infty)$

จะได้โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = [0,\infty)$

และโดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = (0,\infty)$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^3+1+\sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = x^3+1-\sqrt{x}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^3+1)\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$$

2) $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = (1^3+1)+\sqrt{1} = 3$

$(f-g)(1) = f(1)-g(1) = (1^3+1)-\sqrt{1} = 1$

$(fg)(2) = f(2)g(2) = (2^3+1)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2^3+1}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$ ■

ตัวอย่างที่ 36

ให้ $f=\{(1,6),(2,16),(3,12),(5,18)\}$

และ $g=\{(1,6),(2,11),(3,0),(4,1)\}$

จงหา $f+g$, fg และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

วิธีทำ เนื่องจากโดเมนของ f คือ $\{1,2,3,5\}$ และโดเมนของ g คือ $\{1,2,3,4\}$

จะได้โดเมนของ $f+g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \{1,2,3\}$

$(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 6+6 = 12$ จะได้ $(1,12)\in f+g$

$(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 16+11 = 27$ จะได้ $(2,27)\in f+g$

$(f+g)(3) = f(3)+g(3) = 12+0 = 12$ จะได้ $(3,12)\in f+g$

ดังนั้น $f+g=\{(1,12),(2,27),(3,12)\}$

$(fg)(1) = f(1)g(1) = (6)(6) = 36$ จะได้ $(1,36)\in fg$

$(fg)(2) = f(2)g(2) = (16)(11) = 176$ จะได้ $(2,176)\in fg$

$(fg)(3) = f(3)g(3) = (12)(0) = 0$ จะได้ $(3,0)\in fg$

ดังนั้น $fg=\{(1,36),(2,176),(3,0)\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x\in D_g \mid g(x)=0\} = \{1,2\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{6}{6} = 1$ จะได้ $(1,1)\in\frac{f}{g}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{16}{11}$ จะได้ $\left(2,\frac{16}{11}\right)\in\frac{f}{g}$

ดังนั้น $\frac{f}{g}=\left\{(1,1),\left(2,\frac{16}{11}\right)\right\}$

ฟังก์ชันประกอบ

บอลลูนทรงกลมลูกหนึ่งมีการอัดแก๊สเข้าไป เมื่อเวลาเปลี่ยนไปทำให้ความยาวรัศมีเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.1 เซนติเมตรต่อวินาที

ถ้าให้ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที และให้ r แทนความยาวรัศมีของบอลลูนมีหน่วยเป็นเซนติเมตร จะได้ว่าความยาวรัศมีของบอลลูน r ขึ้นกับเวลา t ดังนี้

$$r = 0.1t$$

เมื่อความยาวรัศมีของบอลลูนมีการเปลี่ยนแปลง ทำให้ปริมาตรของแก๊สในบอลลูนมีการเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ถ้าให้ V แทนปริมาตรของแก๊สในบอลลูน และ r แทนความยาวรัศมีของบอลลูน จะได้ว่า

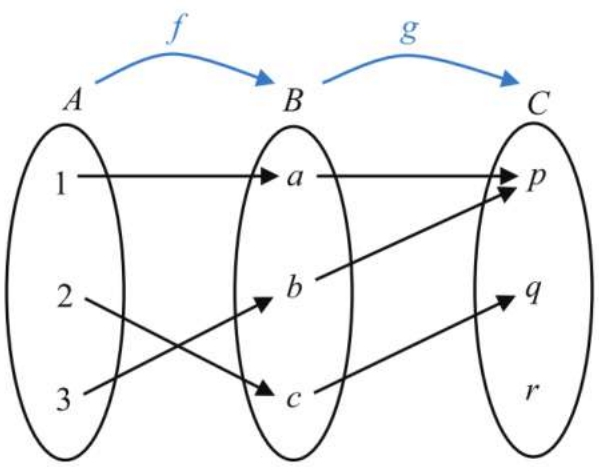
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

แทน r ด้วย $0.1t$ จะได้

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi(0.1t)^3 \\ &= \frac{0.004}{3}\pi t^3 \end{aligned}$$

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าปริมาตรของแก๊สในบอลลูนเป็นฟังก์ชันของความยาวรัศมี และความยาวรัศมีของบอลลูนเป็นฟังก์ชันของเวลา จึงทำให้ปริมาตรของแก๊สในบอลลูนเป็นฟังก์ชันของเวลาด้วย การซ้อนกันของฟังก์ชันในตัวอย่างอื่น เช่น ราคาสินค้าเป็นฟังก์ชันของต้นทุนการขนส่ง ซึ่งต้นทุนการขนส่งเป็นฟังก์ชันของราคาน้ำมัน ดังนั้นราคาสินค้าจึงเป็นฟังก์ชันของราคาน้ำมันด้วย

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังแสดงในแผนภาพ



จากแผนภาพจะได้ $f(1)=a,\ f(2)=c,\ f(3)=b$

$g(a)=p,\ g(b)=p,\ g(c)=q$

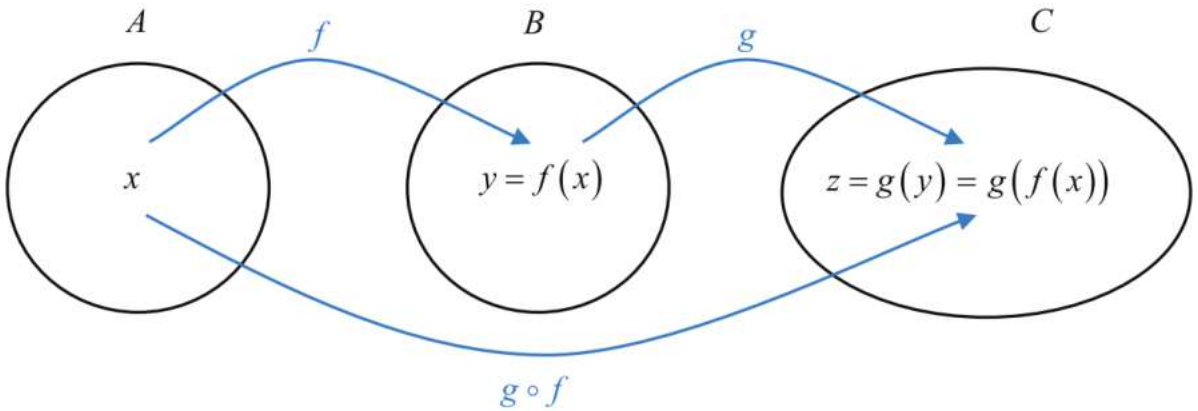
จาก f และ g ที่กำหนดให้ จะได้

$$g(f(1)) = g(a) = p$$
$$g(f(2)) = g(c) = q$$
$$g(f(3)) = g(b) = p$$

จะเห็นว่าฟังก์ชันที่สร้างขึ้นใหม่เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต C เขียนแทนฟังก์ชันนี้ด้วย $g \circ f$ (อ่านว่า จีโอเอฟ) และเรียกว่า **ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ของ f และ g โดย

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = p$$
$$g \circ f(2) = g(f(2)) = q$$
$$g \circ f(3) = g(f(3)) = p$$

นั่นคือ $g \circ f = \{(1, p), (2, q), (3, p)\}$



จากแผนภาพ สำหรับแต่ละ x ในเซต A ถ้ามี $y=f(x)$ ในเซต B และมี $z=g(y)$ ในเซต C จะหา $g(f(x))$ ได้ ซึ่งเท่ากับ z สถานการณ์ข้างต้นทำให้เกิดฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ เพราะฉะนั้น การเกิด $g \circ f$ มีเงื่อนไขสำคัญคือ ต้องมี y อยู่ใน R_f และ D_g พร้อมกัน นั่นคือ $R_f \cap D_g$ ต้องไม่ใช่เซตว่าง ดังนั้น จึงให้บทนิยามของฟังก์ชัน $g \circ f$ ดังนี้

บทนิยาม 12

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือฟังก์ชันที่โดเมนคือ

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in D_g \right\}$$

และกำหนด $g \circ f$ โดย

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ใน } D_{g\circ f}$$

ตัวอย่างที่ 37

ให้ $f(x) = x^2 - 3$ และ $g(x) = x + 2$ จงหาฟังก์ชัน $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมน

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 - 3$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-3, \infty)$

จาก $g(x) = x + 2$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [-3, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \left\{ x \in D_f \;\middle|\; f(x) \in D_g \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - 3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g\left(f(x)\right) \\ &= g\left(x^2 - 3\right) \\ &= \left(x^2 - 3\right) + 2 \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = x^2 - 1$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+2) \\ &= (x+2)^2 - 3 \\ &= x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = x^2 + 4x + 1$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ ■

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นได้ว่า $f \circ g \neq g \circ f$

ตัวอย่างที่ 38

กำหนด $f(x) = -x^2 - 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จะมี $g \circ f$ และ $f \circ g$ หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามี จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมน

วิธีทำ จาก $f(x) = -x^2 - 1$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, -1]$

จาก $g(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $D_g = [0, \infty)$ และ $R_g = [0, \infty)$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \varnothing$ จึงไม่มี $g \circ f$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [0, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f\left(\sqrt{x}\right) \\ &= -\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1 \\ &= -x-1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ g(x) = -x-1$ โดยที่ $D_{f\circ g} = [0,\infty)$ ■

ตัวอย่างที่ 39

กำหนด $f(x)=\sqrt{x}$ และ $g(x)=x^2$ จงหา $g\circ f$ และ $f\circ g$ พร้อมทั้งโดเมน

วิธีทำ จาก $f(x)=\sqrt{x}$ จะได้ $D_f=[0,\infty)$ และ $R_f=[0,\infty)$

จาก $g(x)=x^2$ จะได้ $D_g=\mathbb{R}$ และ $R_g=[0,\infty)$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g\circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\} \\ &= \left\{x\in[0,\infty) \,\middle|\, \sqrt{x}\in\mathbb{R}\right\} \\ &= [0,\infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g\left(\sqrt{x}\right) \\ &= \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ &= x \end{aligned}$$

ดังนั้น $g\circ f(x)=x$ โดยที่ $D_{g\circ f}=[0,\infty)$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [0,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f\circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \left\{x\in D_g \,\middle|\, g(x)\in D_f\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^2\in[0,\infty)\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

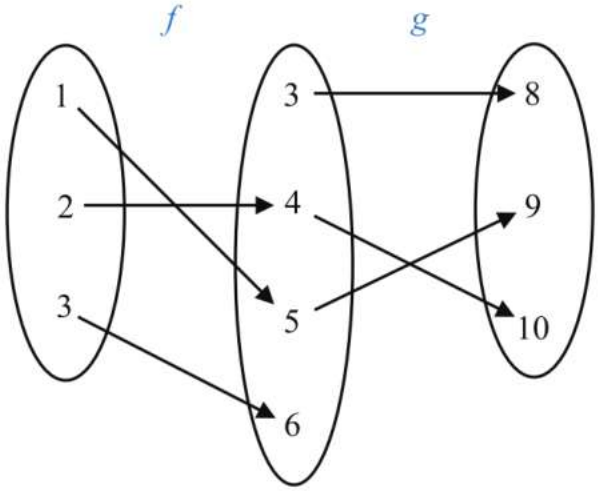
$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(x^2\right) \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= |x| \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = |x|$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$ ■

ตัวอย่างที่ 40

ให้ $f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\}$ และ $g = \{(3, 8), (4, 10), (5, 9)\}$ จงหา $g \circ f$

วิธีทำ



$D_f = \{1, 2, 3\}$ และ $R_f = \{4, 5, 6\}$

$D_g = \{3, 4, 5\}$ และ $R_g = \{8, 9, 10\}$

จะได้ $R_f \cap D_g = \{4, 5\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$

เนื่องจาก $f(1) = 5$ และ $g(5) = 9$

ดังนั้น $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(5) = 9$

เนื่องจาก $f(2) = 4$ และ $g(4)=10$

ดังนั้น $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(4) = 10$

เนื่องจาก $f(3)=6$ แต่ 6 ไม่อยู่ในโดเมนของ g

ดังนั้น 3 ไม่อยู่ในโดเมนของ $g \circ f$

จะได้ $g \circ f = \{(1,9),(2,10)\}$ ■

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าไม่มี $f \circ g$ เพราะ $R_g \cap D_f = \varnothing$

ในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น ได้แสดงวิธีสร้างฟังก์ชันประกอบจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ ซึ่งในบางครั้งเมื่อพบฟังก์ชันที่มีรูปแบบซับซ้อน อาจจะเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันที่มีรูปแบบอย่างง่ายได้ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 41

กำหนด $F(x)=(2x-3)^{10}$ จงเขียน F ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันสองฟังก์ชัน

วิธีทำ สังเกตว่าค่าของฟังก์ชัน F ที่ x ได้จากการหาค่า $2x-3$ แล้วจึงยกกำลัง 10

ดังนั้น ให้ $f(x)=2x-3$ และ $g(x)=x^{10}$

จะได้ว่า $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = (2x-3)^{10}$

ดังนั้น $F = g \circ f$ ■

การเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปฟังก์ชันประกอบอาจทำได้หลายวิธี เช่น จากตัวอย่างข้างต้น

ถ้าให้ $h(x)=2x$ และ $k(x)=(x-3)^{10}$

จะได้ $k \circ h(x) = k(h(x)) = k(2x) = (2x-3)^{10}$

ดังนั้น $F = k \circ h$

การเลือกฟังก์ชันที่มาประกอบกันแล้วได้ฟังก์ชันที่กำหนดให้ จึงขึ้นอยู่กับความเหมาะสมและความสะดวกในการคำนวณ

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหา $f+g, f-g, fg$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

   1) $f(x)=x^2,\ g(x)=x-2$
   2) $f(x)=\sqrt{9-x^2},\ g(x)=\sqrt{x^2-2}$
   3) $f(x)=x^3+4x^2,\ g(x)=3x^2+1$
   4) $f(x)=\frac{2}{x},\ g(x)=-\frac{4}{x+2}$
   5) $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ g(x)=\sqrt{1-x}$
   6) $f(x)=\frac{1}{x+2},\ g(x)=\frac{x}{x-1}$

2. จงหาโดเมนของฟังก์ชัน

   1) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$
   2) $f(x)=\sqrt{x+2}-\frac{1}{x}$
   3) $f(x)=(x+2)^2(x-4)^{\frac{1}{4}}$
   4) $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$

3. ให้ $f(x)=3x-5$ และ $g(x)=1-x^2$ จงหา

   1) $f(g(0))$ และ $g(f(0))$
   2) $f(f(4))$ และ $g(g(1))$
   3) $f\circ g(-2)$ และ $g\circ f(-2)$
   4) $f\circ f(-1)$ และ $g\circ g(2)$

4. ให้ $f=\{(-3,\ 1),(0,\ 4),(2,\ 0)\}$, $g=\{(-3,\ 2),(1,\ 2),(2,\ 6)\}$ และ $h=\{(2,4),(1,0)\}$ จงหาฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f+g$ 2) $f-g$

3) $g-f$ 4) fg

5) $\frac{f}{g}$ 6) $\frac{g}{f}$

7) $f\circ g$ 8) $g\circ f$

9) $f\circ h$ 10) $h\circ f$

11) $h\circ g$ 12) $g\circ h$

5. จงหา $f\circ g, g\circ f, f\circ f$ และ $g\circ g$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $f(x)=3x+2$, $g(x)=4x-1$ 2) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+5$

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2x+3$ 4) $f(x)=|x|$, $g(x)=2x-5$

5) $f(x)=\frac{x+1}{x}$, $g(x)=2x-3$ 6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=\sqrt{x}$

6. กำหนด $f(x)=x^4+4$, $g(x)=x-5$ และ $h(x)=\sqrt{x}$ จงหา $(f\circ g)\circ h$ และ $f\circ(g\circ h)$

7. จงหาฟังก์ชัน f และ g ซึ่ง $f\circ g=h$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน h ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $h(x)=(x-9)^8$ 2) $h(x)=\sqrt{x}+5$

3) $h(x)=\frac{x^2}{x^2+2}$ 4) $h(x)=\frac{1}{x+10}$

5) $h(x)=|1-x^5|$ 6) $h(x)=\sqrt{2+\sqrt{x}}$

8. ถ้า $g(x)=2x+1$ และ $h(x)=4x^2+4x+7$ แล้ว จงหาฟังก์ชัน f ซึ่ง $f\circ g=h$

1.6 ฟังก์ชันผกผัน

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ใด ๆ ให้ สามารถหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ได้ โดยการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์นั้น

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นจึงมีตัวผกผันของฟังก์ชันซึ่งเป็นความสัมพันธ์ แต่มีข้อสังเกต คือ ตัวผกผันของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป เช่น

สำหรับ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ เป็นฟังก์ชัน
และ $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ เป็นฟังก์ชัน
สำหรับ $g = \{(1, 2), (3, 2), (2, 3)\}$ เป็นฟังก์ชัน
แต่ $g^{-1} = \{(2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ถ้าตัวผกผันของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันแล้ว จะเรียก f^{-1} ว่าเป็น **ฟังก์ชันผกผัน (inverse function)** ของ f และกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันที่จะมีฟังก์ชันผกผันต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 1

ให้ f เป็นฟังก์ชัน

f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1–1

ตัวอย่างที่ 42

ฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=3x+1$ มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันผกผัน

วิธีทำ **วิธีที่ 1** ใช้บทนิยาม โดยเขียน f ให้อยู่ในรูปเซต จะได้ $f=\{(x,y)|y=3x+1\}$

จะได้ $f^{-1}=\{(x,y)|\ x=3y+1\}=\left\{(x,y)|\ y=\frac{x-1}{3}\right\}$

ให้ x,y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x,y)\in f^{-1}$ และ $(x,z)\in f^{-1}$

จะได้ว่า $y=\frac{x-1}{3}$ และ $z=\frac{x-1}{3}$

ดังนั้น $y=z$ เสมอ

จะได้ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบท โดยแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนี้

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $3x_1+1=3x_2+1$

ทำให้ $x_1=x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท จะได้ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

นั่นคือ $f(x)=3x+1$ มีฟังก์ชันผกผัน และ $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3}$ ■

ตัวอย่างที่ 43

กำหนดให้ $f(x)=x^2$ จงพิจารณาว่า f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่

วิธีทำ ใช้บทนิยาม โดยเขียน f ให้อยู่ในรูปเซต จะได้ $f=\{(x,y)|\ y=x^2\}$

จะได้ $f^{-1}=\{(x,y)|x=y^2\}$

จะเห็นว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(1,-1)\in f^{-1}$ และ $(1,1)\in f^{-1}$ ■

ในกรณีที่ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน ซึ่งหมายถึง f^{-1} เป็นฟังก์ชัน โดยที่โดเมนของ f^{-1} เท่ากับเรนจ์ของ f และเรนจ์ของ f^{-1} เท่ากับ โดเมนของ f

และ $(x, y) \in f$ ก็ต่อเมื่อ $(y, x) \in f^{-1}$

นั่นคือ $y = f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $x = f^{-1}(y)$ ------- (1)

แสดงว่า f ส่ง x ไป y ก็ต่อเมื่อ f^{-1} จะส่ง y ไป x

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $y = f(x)$ จะได้ $f^{-1}(y) = x$ ทำให้

$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$$

และสำหรับทุก ๆ $y \in R_f$ ถ้า $y = f(x)$ จะได้ $f^{-1}(y) = x$ และทำให้

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y))$$

จากตัวอย่างที่ 42 และ 43 ซึ่งแสดงการหา f^{-1} โดยการเขียน f ในรูปเซต อาจจะหา f^{-1} ได้จาก (1) นั่นคือ จาก $y = f(x)$ ซึ่งเป็นสมการที่เขียน y ในพจน์ของ x จากนี้จะหา x ในพจน์ของ y ซึ่งหมายถึง $x = f^{-1}(y)$ ขั้นต่อไปเปลี่ยน x เป็น y และ y เป็น x เพื่อที่จะได้ $y = f^{-1}(x)$

จะแสดงการหาฟังก์ชันผกผันโดยวิธีนี้กับฟังก์ชันในตัวอย่างที่ 42 คือ $f(x) = 3x + 1$

ดังนั้น $y = f(x) = 3x + 1$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x = \frac{y-1}{3} = f^{-1}(y)$

เปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x

จะได้ $y = \frac{x-1}{3} = f^{-1}(x)$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

ตัวอย่างที่ 44

จงหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x)=\dfrac{x^3+2}{3}$

วิธีทำ จาก $y=f(x)=\dfrac{x^3+2}{3}$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x^3=3y-2$ หรือ $x=\sqrt[3]{3y-2}=f^{-1}(y)$

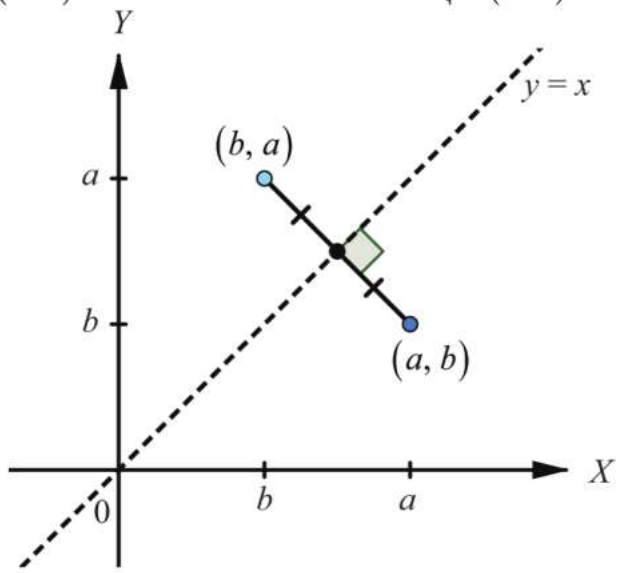
สลับ x กับ y จะได้ $y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{3x-2}$ ■

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผัน พิจารณากราฟของ f และกราฟของ f^{-1} ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

จาก $b=f(a)$ ก็ต่อเมื่อ $a=f^{-1}(b)$

แสดงว่า จุด (a,b) อยู่บนกราฟของ f ก็ต่อเมื่อ จุด (b,a) อยู่บนกราฟของ f^{-1}

จุด (b,a) ได้จากการสะท้อนภาพของจุด (a,b) ข้ามเส้นตรง $y=x$ ดังรูป



จากที่ได้กล่าวไว้แล้ว กราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์ r ได้จากกราฟของ r โดยเขียนภาพสะท้อนข้ามเส้นตรง $y=x$ จะสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ของ f จากกราฟของ f ได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 45

กำหนด $f(x)=\sqrt{x-2}$ จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

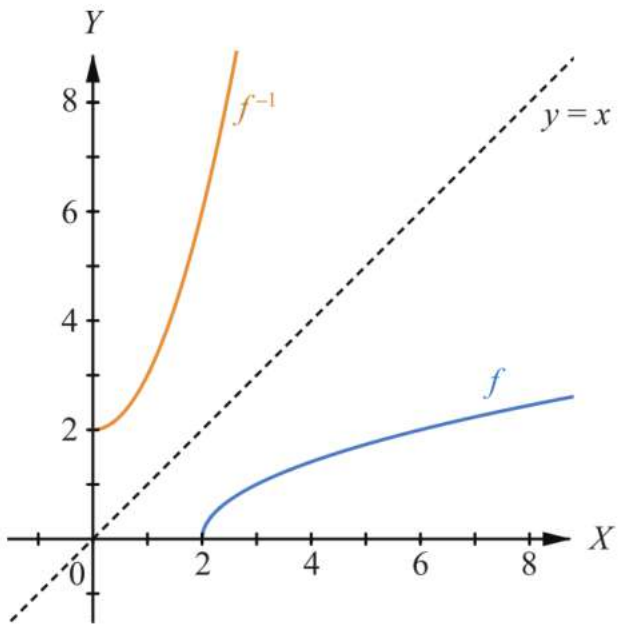
วิธีทำ จาก $y=f(x)=\sqrt{x-2}$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x=y^2+2$ และ $y\geq 0$

สลับ x กับ y จะได้ $y=x^2+2$ และ $x\geq 0$

จะได้ $f^{-1}(x)=x^2+2$ โดยที่ $D_{f^{-1}}=\{x\mid x\geq 0\}$

ต่อไปเขียนกราฟของ f ซึ่งทำให้ได้กราฟของ f^{-1} โดยสะท้อนข้ามเส้นตรง $y=x$ ดังรูป



แบบฝึกหัด 1.6

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
   1) ถ้า $f(3)=10$ จงหา $f^{-1}(10)$
   2) ถ้า $f^{-1}(3)=-4$ จงหา $f(-4)$
   3) ถ้า $f(10)=18$ จงหา $f^{-1}(18)$
   4) ถ้า $f^{-1}(4)=3$ จงหา $f(3)$
   5) ถ้า $f(x)=5+2x$ จงหา $f^{-1}(10)$
   6) ถ้า $f(x)=x^2+4x$ เมื่อ $x\geq -2$ จงหา $f^{-1}(12)$

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันผกผัน
   1) $f(x)=2x+5$
   2) $f(x)=\frac{1}{x}$
   3) $f(x)=x^2-4$ เมื่อ $x\geq 0$
   4) $f(x)=\frac{1}{x-3}$
   5) $f(x)=\sqrt{x}-1$

3. จงหาฟังก์ชันผกผันของ f
   1) $f(x)=5-x$
   2) $f(x)=\frac{x}{5}$
   3) $f(x)=\frac{5-2x}{1+3x}$
   4) $f(x)=5-x^2,\ x\geq 0$
   5) $f(x)=1+\sqrt{x+1}$

4. กำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้
   (ก) $f(x)=3x+6$
   (ข) $f(x)=x^3-2$
   (ค) $f(x)=9-x^2,\ x\geq 0$
   (ง) $f(x)=\sqrt{x+3}$
   1) จงเขียนกราฟของ f
   2) จงเขียนกราฟของ f^{-1} โดยใช้กราฟของ f
   3) จงหา f^{-1}

5. กำหนดให้ $f(x)=x^3$ ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

6. กำหนดให้ $f(x)=|x|+4$ ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ถ้า $E=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2<25\}$ และ $r=\{(4,2),(3,1),(2,3),(5,4)\}$ แล้ว จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซต E หรือไม่

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $r=\{(x,y)\mid y^2=x\}$

2) $r=\{(x,y)\mid y=x^3\}$

3) $r=\{(x,y)\mid y=-\sqrt{x}\}$

4) $r=\{(x,y)\mid y=(x-2)^2\}$

5) $r=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x^2-1}\}$

6) $r=\left\{(x,y)\mid y=\dfrac{1}{|1-x|}\right\}$

7) $r=\left\{(x,y)\mid y=\dfrac{3x}{x+5}\right\}$

8) $r=\left\{(x,y)\mid y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}\right\}$

3. จงหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์ เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1) $r=\{(2,2),(2,3),(1,4),(3,2),(3,3)\}$

2) $r=\{(x,y)\mid 2x+y=1\}$

3) $r=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x}\}$

4) $r=\{(x,y)\mid y>x\}$

4. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r ดังต่อไปนี้

1) $r=\{(x,y)\in A\times A \mid y=x-2\}$ เมื่อ $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

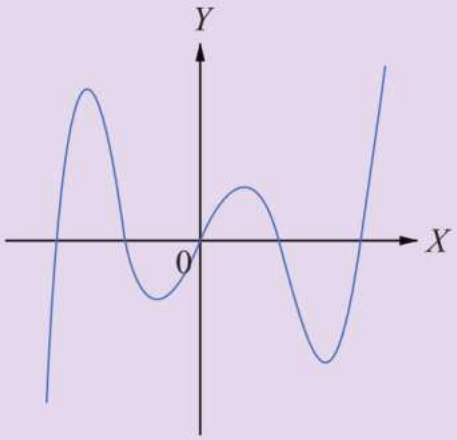
2) $r=\{(x,y) \mid y=2x\}$

3) $r=\{(x,y) \mid y>1-2x\}$

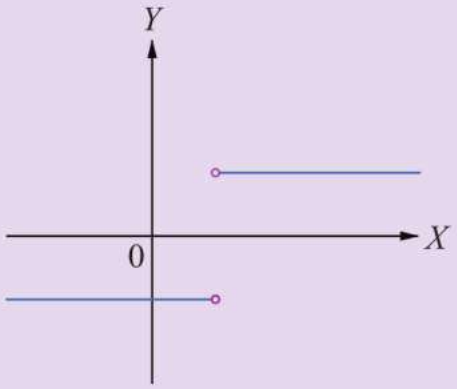
5. ถ้า r และ s เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $D_r=R_s$ และ $R_r=D_s$ แล้วจำเป็นหรือไม่ ที่ s จะเป็นตัวผกผันของ r ถ้าไม่จำเป็น จงยกตัวอย่างค้าน

6. จากแผนภาพหรือกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ในข้อใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันและข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

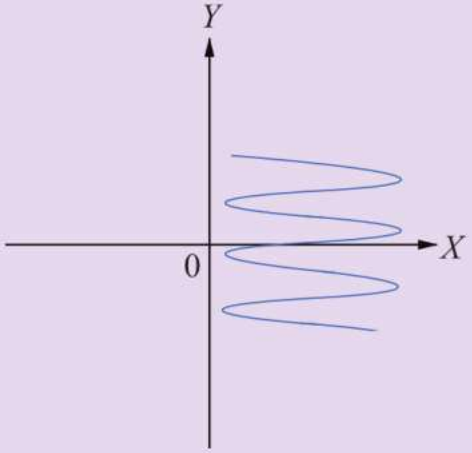
1)



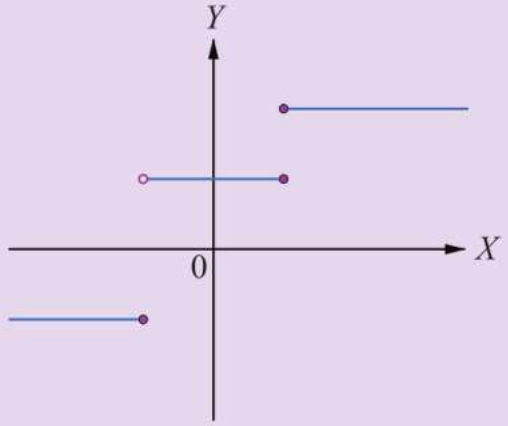
2)



3)



4)



7. ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน ถ้าไม่เป็น จงให้เหตุผล

1) $\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d),(4,e)\}$

2) $\{(x,y)\in A\times A \mid y\geq x\}$ เมื่อ $A=\{1,2,3\}$

3) $\{(x,y) \mid x=3\}$

4) $\{(x,y) \mid y=\sqrt{x}\}$

5) $\{(x,y) \mid y=1$ เมื่อ $x\geq 0$ และ $y=-1$ เมื่อ $x\leq 0\}$

8. ถ้า $f(x)=x^2+3x-5$ จงหา $f(0), f(-1), f(3), f(a)$ และ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อ $h\neq 0$

9. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x)=2x+1$

2) $f(x)=\sqrt{x-2}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$

4) $f(x)=2x^2$

5) $f(x)=|x+1|$

10. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1) $f(x)=-5x+2$

2) $f(x)=x^3-5$

3) $f(x)=-x^2-6x-10$

4) $f(x)=|3x-5|+7$

11. กำหนดให้ $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า } 7\}$ และ $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid -4<x^2\le 4\}$

$f_1=\{(-1,2),(0,2),(1,3),(2,3)\}$ $f_2=\{(2,2),(3,2),(5,2)\}$

$f_3=\{(5,-1),(3,0),(2,2)\}$ $f_4=\{(-1,3),(0,3),(1,3),(2,3)\}$

$f_5=\{(-1,2),(0,3),(1,3),(2,5)\}$ $f_6=\{(2,0),(5,-1),(3,2)\}$

$f_7=\{(-1,0),(0,1),(1,2),(2,-1)\}$

จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็น

1) ฟังก์ชันจาก A ไป B
2) ฟังก์ชันจาก B ไป A
3) ฟังก์ชันจาก A ไป A
4) ฟังก์ชัน $1-1$ จาก A ไป B
5) ฟังก์ชัน $1-1$ จาก B ไป B
6) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A
7) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
8) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

12. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน $1-1$

1) $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ -3, & x\ge 1\end{cases}$
2) $h(x)=|3x+2|$
3) $g(x)=\sqrt{x+1}$
4) $r(x)=x^2-x+2$

13. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0,\infty)$

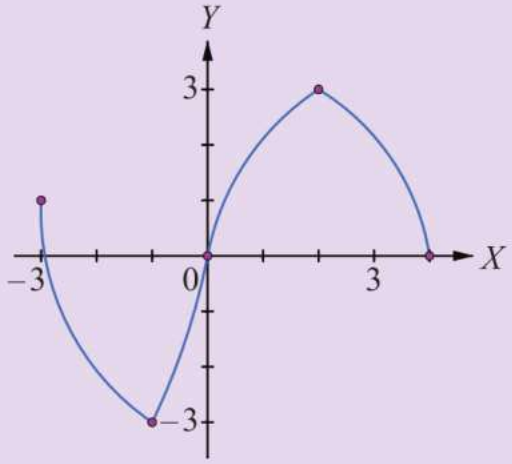
1) $f(x)=|x-2|$
2) $h(x)=x^2+1$
3) $g(x)=x^2-4x+4$

14. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$

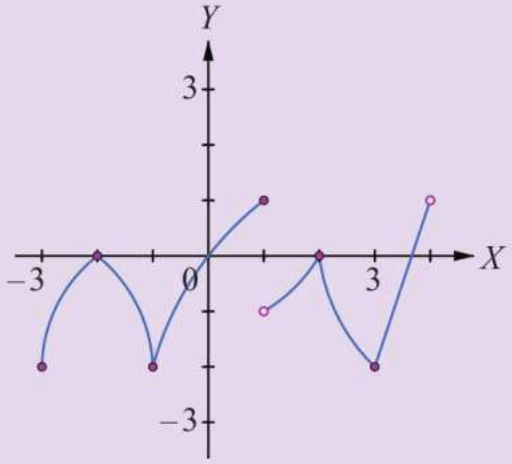
1) $f(x)=1-x$
2) $h(x)=x^2-4x+2$

15. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงหาช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด

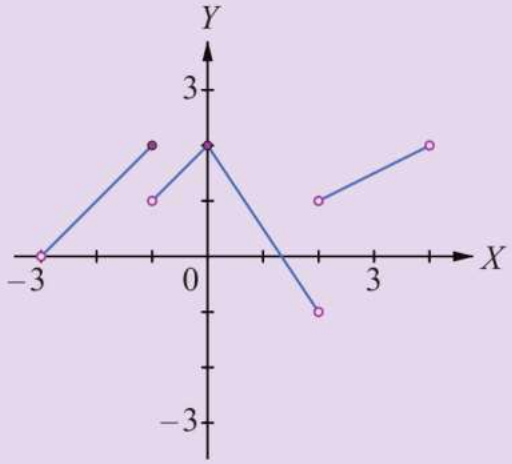
1)



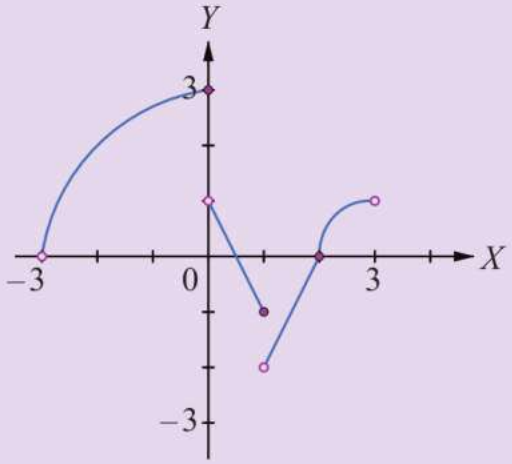
2)



3)



4)



16. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

1) $f(x)=|2x+1|$ บนช่วง $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$

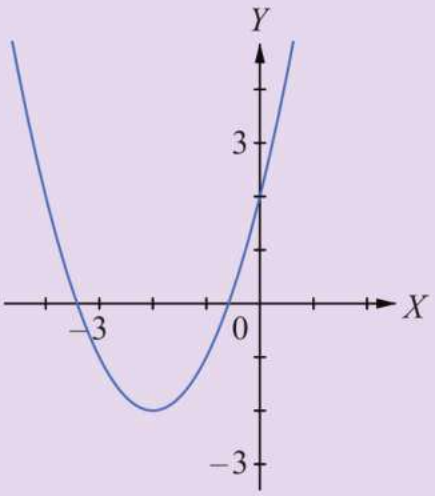
2) $f(x)=-x^2-4$ บนช่วง $(-\infty,0]$

3) $f(x)=x^3+2$ บน $\mathbb{R}$

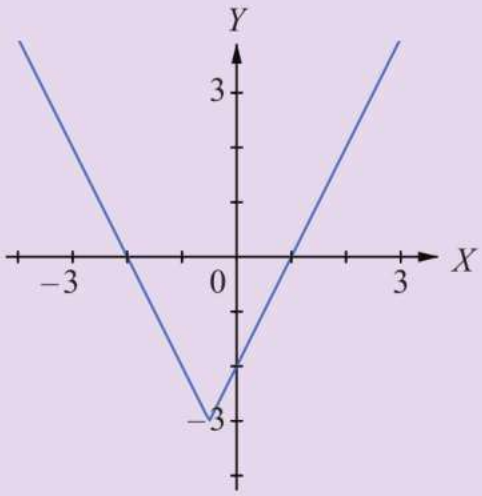
4) $f(x)=x^2-2x+1$ บนช่วง $[-1,1]$

17. จงจับคู่สมการกับกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

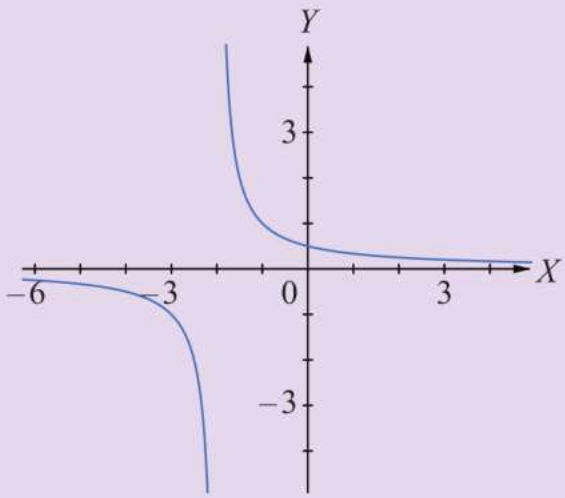
1) $y = 5x + 3$
2) $y = x^2 + 4x + 2$
3) $y = x^2 - 4x + 6$
4) $y = |2x + 1| - 3$
5) $y = |3x - 3| + 1$
6) $y = \frac{1}{x+2}$



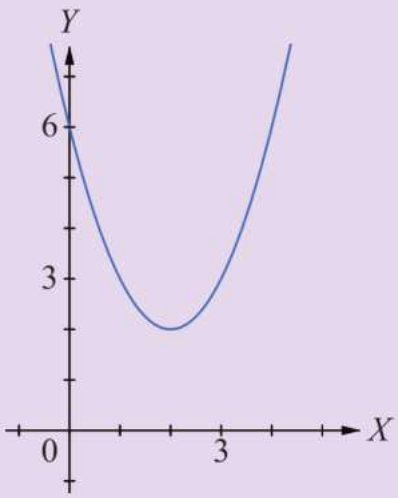
(ก)



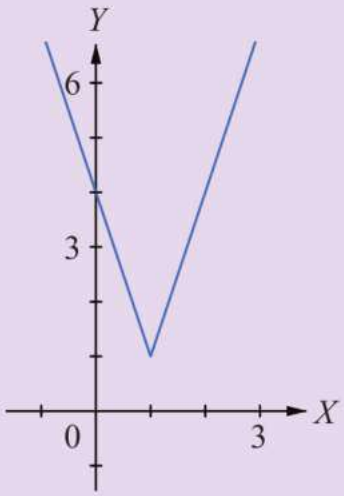
(ข)



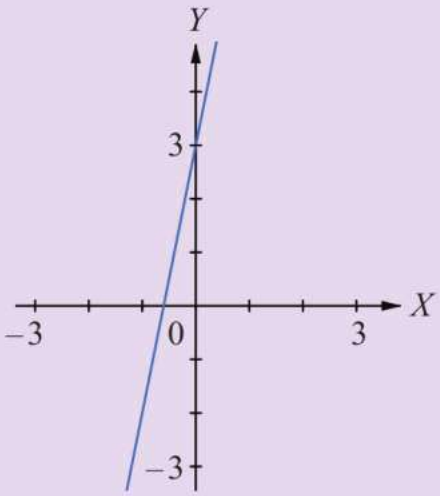
(ค)



(ง)



(จ)



(ฉ)

18. จงหา $f+g,\ f-g,\ fg$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน

1) $f(x)=x^2-2x,\ g(x)=1-x^2$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-4},\ g(x)=\sqrt{3-x}$

3) $f(x)=\frac{1}{x^2-1},\ g(x)=x^3-1$

4) $f(x)=\frac{x}{x-3},\ g(x)=\frac{1}{x+1}$

19. ให้ $f(x)=|x+1|-3$ และ $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ จงหา

1) $f(g(0))$ และ $g(f(0))$

2) $f(f(3))$ และ $g(g(-2))$

3) $f\circ g(-1)$ และ $g\circ f(2)$

4) $f\circ f(1)$ และ $g\circ g(3)$

5) $f\circ f(x)$ และ $g\circ g(x)$

20. ให้ $f=\{(-1,1),(0,4),(1,5)\}$, $g=\{(-1,0),(1,4),(2,1)\}$ และ $h=\{(0,0),(2,-1),(1,2)\}$ จงหาฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f+g$ 2) $g-h$ 3) $\frac{g}{f}$

4) $\frac{f}{h}$ 5) hg 6) $f\circ h$

7) $h\circ f$ 8) $h\circ g$ 9) $g\circ h$

21. จงหา $f\circ g, g\circ f, f\circ f$ และ $g\circ g$ พร้อมทั้งโดเมนของแต่ละฟังก์ชัน เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และ g ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $f(x)=5x-6$, $g(x)=\frac{x}{3}$ 2) $f(x)=x^3+1$, $g(x)=x+2$

3) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x+5}$ 4) $f(x)=x+4$, $g(x)=|x-4|$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=x^2+4x$ 6) $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(x)=\frac{x-2}{x}$

22. กำหนด $f(x)=x^3-1$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$ และ $h(x)=(x-1)^2$ จงหา $(f\circ g)\circ h$ และ $f\circ(g\circ h)$

23. ถ้า $f(x)=3x+5$ และ $h(x)=3x^2+3x+2$ แล้ว จงหาฟังก์ชัน g ซึ่ง $f\circ g=h$

24. จงแสดงว่า f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

1) $f(x)=3x$, $g(x)=\frac{1}{3}x$

2) $f(x)=\frac{3-x}{5}$, $g(x)=3-5x$

3) $f(x)=x^5$, $g(x)=\sqrt[5]{x}$

4) $f(x)=x^3+3$, $g(x)=(x-3)^{\frac{1}{3}}$

5) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ เมื่อ $0\le x\le 2$, $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ เมื่อ $0\le x\le 2$

25. จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

1) $f(x)=5x+7$
2) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$
3) $f(x)=5+\sqrt[3]{x}$
4) $f(x)=x^6,\quad x\geq 0$

26. กำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

(ก) $f(x)=|5x+3|,\ x\geq 0$
(ข) $f(x)=5-2x^2,\ x\leq 0$
(ค) $f(x)=\sqrt{x-2}+1$
(ง) $f(x)=-x^3+2$

1) จงเขียนกราฟของ f
2) จงเขียนกราฟของ f^{-1} โดยใช้กราฟของ f
3) จงหา f^{-1}

27. **ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)** บนเซต A คือ $I_A : A\to A$ ซึ่ง $I_A(x)=x$ ทุก $x\in A$ จงแสดงว่า สำหรับฟังก์ชัน $f : A\to B$ จะได้ว่า

1) $f\circ I_A = f$ และ $I_B\circ f = f$
2) ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน แล้ว $f^{-1}\circ f = I_{D_f}$ และ $f\circ f^{-1} = I_{R_f}$

28. ถ้า $f\circ g = h$ และ g มีฟังก์ชันผกผันแล้ว จงพิสูจน์ว่า $f = h\circ g^{-1}$

29. ในการดำน้ำแบบ SCUBA นักดำน้ำต้องคำนึงถึงความดันน้ำที่ระดับความลึกต่าง ๆ ซึ่งสามารถแทนด้วยฟังก์ชัน $f(x)=ax+b$ โดยที่ $f(x)$ แทนความดันน้ำในหน่วยปอนด์ต่อตารางนิ้ว (pound per square inch: psi) ที่ระดับความลึก x ฟุต a แทนความดันน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อความลึกทุก ๆ หนึ่งฟุต และ b แทนความดันที่ผิวน้ำทะเล (psi) จงหาว่าความดันน้ำทะเลเป็นเท่าใดขณะที่นักดำน้ำอยู่ที่ความลึก 40 ฟุต เมื่อความดันน้ำทะเลเพิ่มขึ้น 0.45 psi ทุก ๆ ความลึกหนึ่งฟุต และความดันที่ผิวน้ำทะเลประมาณ 14.7 psi

เสริมสมอง : SCUBA

SCUBA มาจากคำว่า Self-Contained Underwater Breathing Apparatus เป็นอุปกรณ์ช่วยในการหายใจขณะอยู่ใต้น้ำ ผู้ที่จะดำน้ำในประเภทนี้ต้องผ่านหลักสูตรการดำน้ำโดยเฉพาะ และควรคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงความดัน เพื่อไม่ให้เกิดอันตรายต่อเนื้อเยื่อและอวัยวะของร่างกาย เช่น หู จมูก ปอด

30. บริษัทแห่งหนึ่งจ่ายค่าจ้างให้กับพนักงาน โดยจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยง ค่าพาหนะ ให้กับพนักงานขายทุกคน คนละเท่า ๆ กัน และจ่ายค่านายหน้า (คิดเป็นร้อยละของยอดขายที่พนักงานแต่ละคนขายได้) ปรากฏว่าเมื่อเดือนที่แล้ว นาย ก ได้รับเงินจากบริษัท 34,000 บาท โดยที่เขามียอดขาย 200,000 บาท และนาย ข ได้รับเงินจากบริษัท 28,000 บาท โดยที่เขามียอดขาย 150,000 บาท

1) บริษัทจ่ายค่านายหน้าให้กับพนักงานร้อยละเท่าใด
2) บริษัทจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยงและค่าพาหนะให้นาย ก และนาย ข เป็นเงินคนละเท่าใด
3) จงเขียนฟังก์ชันแสดงรายได้ที่พนักงานได้รับในแต่ละเดือน

31. บริษัทท่องเที่ยวแห่งหนึ่งคิดค่าใช้จ่ายคนละ 475 บาท สำหรับนักท่องเที่ยว 75 คน แต่ถ้ามีนักท่องเที่ยวมาใช้บริการเกิน 75 คน จะลดราคาให้คนละ 5 บาท สำหรับนักท่องเที่ยวที่เพิ่มขึ้น 1 คน (เช่น ถ้ามีนักท่องเที่ยว 80 คน จะคิดค่าใช้จ่ายคนละ $475-(5\times5)$ หรือ 450 บาท) จงหาจำนวนนักท่องเที่ยวที่จะทำให้บริษัทท่องเที่ยวแห่งนี้มีรายได้มากที่สุด และบริษัทจะมีรายได้มากที่สุดเท่าใด

32. ชายคนหนึ่งต้องการล้อมรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อทำการเกษตร โดยด้านหนึ่งของพื้นที่ที่ต้องการล้อมรั้วอยู่ติดคลองซึ่งไม่ต้องมีรั้วกั้น ถ้ารั้วทั้งหมดยาว 120 เมตร แล้ว

1) จงหาความสัมพันธ์ของพื้นที่กับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้
2) ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า x จะมากที่สุดเท่าใด
3) ชายผู้นี้จะล้อมรั้วให้ได้พื้นที่มากที่สุดเป็นเท่าใด

33. จงหาค่ามากที่สุดของ xy เมื่อ $6x+2y=8$

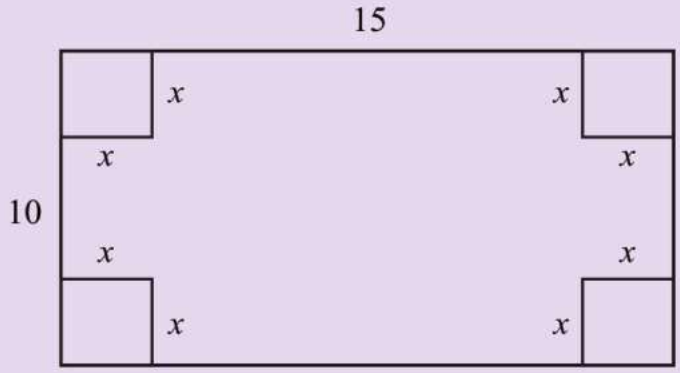
34. อาคารจอดรถแห่งหนึ่ง จอดฟรี 3 ชั่วโมงแรก ชั่วโมงต่อไปชั่วโมงละ 30 บาท หลังจากชั่วโมงที่ 8 คิดค่าใช้บริการชั่วโมงละ 50 บาท (เศษของชั่วโมง คิดเป็น 1 ชั่วโมง) จงเขียนฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันแสดงอัตราค่าบริการจอดรถของอาคารแห่งนี้

35. ให้ $N(t)=100t-5t^2$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนรถยนต์ซึ่งโรงงานแห่งหนึ่งผลิตได้ในระยะเวลา t ชั่วโมง เมื่อ $0\le t\le 10$ ถ้าฟังก์ชันค่าใช้จ่ายในการผลิตรถยนต์เขียนได้เป็น $C(x)=5000+6000x$ เมื่อ x แทนจำนวนรถยนต์ จงเขียนค่าใช้จ่ายในการผลิตรถยนต์ในรูปฟังก์ชันของระยะเวลาในการผลิตรถยนต์

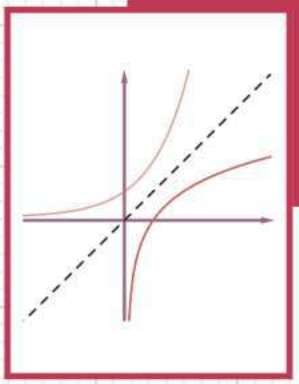
36. สมมติว่า บัญชีเงินฝากประจำได้ดอกเบี้ยร้อยละ 5 ทบต้นปีละครั้ง ถ้านักเรียนนำเงิน x บาท ฝากเข้าบัญชีดังกล่าว เมื่อครบกำหนด 1 ปี จะได้เงินรวม $A(x)=x+0.05x=1.05x$ จงหา $A\circ A$, $(A\circ A)\circ A$, $((A\circ A)\circ A)\circ A$ และฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชัน A จำนวน n ฟังก์ชัน เมื่อ n แทนจำนวนนับ พร้อมทั้งระบุว่าฟังก์ชันประกอบเหล่านี้แทนอะไร

37. จุดเยือกแข็งของน้ำบริสุทธิ์คือ $0^\circ C$ หรือ $32^\circ F$ และจุดเดือดของน้ำบริสุทธิ์คือ $100^\circ C$ หรือ $212^\circ F$ ซึ่งความสัมพันธ์ของอุณหภูมิที่เป็นองศาเซลเซียส $(^\circ C)$ และองศาฟาเรนไฮต์ $(^\circ F)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น
   1) จงเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ แสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์ เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส
   2) จงเขียนฟังก์ชัน $g(x)$ แสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์
   3) จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ และฟังก์ชัน $g(x)$ พร้อมทั้งพิจารณาว่าฟังก์ชันทั้งสองมีความสัมพันธ์กันอย่างไร
   4) ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ $117^\circ F$ จะเป็นกี่องศาเซลเซียส
   5) ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ $30^\circ C$ จะเป็นกี่องศาฟาเรนไฮต์

38. กล่องขนมทำจากกระดาษกว้าง 10 นิ้ว ยาว 15 นิ้ว โดยตัดกระดาษเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว x นิ้ว ออกจากมุมทั้งสี่ แล้วพับด้านข้างทำเป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก



1) จงเขียนฟังก์ชัน $V(x)$ แสดงปริมาตรของกล่อง เมื่อ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2) จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $V(x)$ โดยพิจารณาจากขนาดของกระดาษที่ใช้ทำกล่อง
3) ถ้ากำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม กล่องจะมีความจุมากที่สุด เมื่อ x เป็นเท่าใด และกล่องมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว
4) จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $V(x)$
5) จากกราฟในข้อ 4) จงหาความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ทำให้กล่องมีความจุ 100 ลูกบาศก์นิ้ว



บทที่ 2 | ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

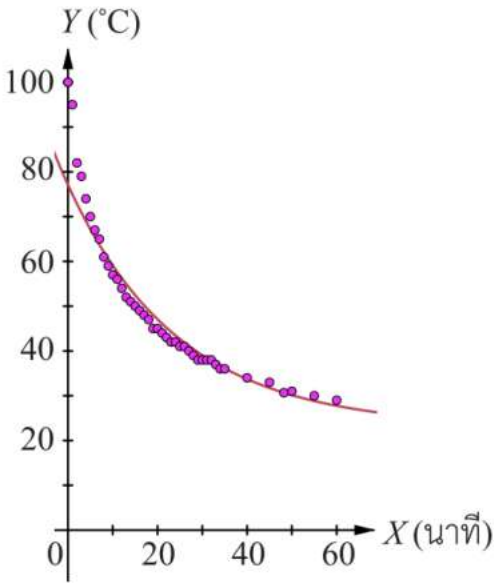
2.1 เลขยกกำลัง
2.1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม
2.1.2 รากที่สองในระบบจำนวนจริง รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์
2.1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
2.2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
2.3 ฟังก์ชันลอการิทึม
2.4 การหาค่าลอการิทึม
2.5 การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม
2.6 สมการและอสมการลอการิทึม
2.7 การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

จุดมุ่งหมาย

1. ใช้สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังในการแก้ปัญหา
2. บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
3. อธิบายลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
4. แก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล
5. แก้สมการและอสมการลอการิทึม
6. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา

บทที่ 2

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม



ในบทนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีความสำคัญในวิทยาการด้านต่าง ๆ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลากหลาย เช่น การเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตบางชนิด การสลายตัวของธาตุกัมมันตรังสี การลดอุณหภูมิของวัตถุตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม การคำนวณเกี่ยวกับดอกเบี้ยและการลงทุน สถานการณ์เหล่านี้สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เช่น ในการศึกษาการลดอุณหภูมิของน้ำร้อน สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิของน้ำร้อนกับเวลาได้ดังรูป และสามารถใช้ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลมาเป็นตัวแบบในการอธิบายได้

สมมติอะมีบา ซึ่งเป็นสิ่งมีชีวิตเซลล์เดียวขนาดเล็ก สามารถแบ่งเซลล์เพื่อเพิ่มจำนวนจากหนึ่งเป็นสองได้ทุก 1 นาที ถ้าเริ่มต้นมีอะมีบา 1 เซลล์ ในจานเพาะเชื้อ เมื่อผ่านไปแต่ละนาที จำนวนอะมีบาในจานเพาะเชื้อจะมีปริมาณดังนี้ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ... การเพิ่มปริมาณขึ้นแบบนี้เรียกว่าการเพิ่มขึ้นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังและกรณฑ์ที่สองในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

goo.gl/oiG5fp

2.1 เลขยกกำลัง

2.1.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

ในหัวข้อนี้ จะทบทวนบทนิยามและสมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม โดยไม่มีการพิสูจน์

บทนิยาม 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ ตัว}}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง
เรียก a ว่าฐานของเลขยกกำลัง และ
เรียก n ว่าเลขชี้กำลัง

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม มีสมบัติตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ $(32)^7 \cdot 4^{-17}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(32)^7 \cdot 4^{-17} &= \left(2^5\right)^7 \cdot \left(2^2\right)^{-17} \\ &= 2^{35} \cdot 2^{-34} \\ &= 2^{35+(-34)} \\ &= 2\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 2

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ จงเขียนพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$

2) $\left(x^{-3}y^{-2}z^0\right)^{-2}$

3) $\frac{4x^{-2}-4x^{-1}+1}{2x^{-2}-x^{-1}}$

วิธีทำ 1) $\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 = \frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{\left(y^2\right)^4x^4}{z^4}$

$= \frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y^8x^4}{z^4}$

$= \left(x^3x^4\right)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4}$

$= \frac{x^7y^5}{z^4}$

2) $\left(x^{-3}y^{-2}z^0\right)^{-2} = \left(x^{-3}y^{-2}(1)\right)^{-2}$

$= \left(x^{-3}y^{-2}\right)^{-2}$

$= \left(x^{-3}\right)^{-2}\left(y^{-2}\right)^{-2}$

$= x^{(-3)(-2)}y^{(-2)(-2)}$

$= x^6y^4$

$$
\begin{aligned}
3)\ \frac{4x^{-2}-4x^{-1}+1}{2x^{-2}-x^{-1}} &= \frac{(4x^{-2}-4x^{-1}+1)(x^2)}{(2x^{-2}-x^{-1})(x^2)} \\
&= \frac{4x^{-2+2}-4x^{-1+2}+x^2}{2x^{-2+2}-x^{-1+2}} \\
&= \frac{4-4x+x^2}{2-x} \\
&= \frac{(2-x)^2}{2-x} \\
&= (2-x)^{2-1} \quad \text{เมื่อ } x \neq 2 \\
&= 2-x \qquad \text{เมื่อ } x \neq 2
\end{aligned}
$$

■

เสริมสมอง : Google

Larry Page และ Sergey Brin นักศึกษาปริญญาเอกชาวอเมริกัน มหาวิทยาลัย Stanford ได้ร่วมกันจัดทำโปรแกรมค้นหา (search engine) ซึ่งในปัจจุบันรู้จักกันในชื่อ Google และได้ก่อตั้ง Google Inc. ขึ้นใน ค.ศ. 1998 คำว่า Google มาจาก "googol" ซึ่งหมายถึง 10^{100} ชื่อ Google เป็นสิ่งที่สะท้อนให้เห็นว่าผู้ก่อตั้งต้องการจะสื่อถึงการจัดระเบียบข้อมูลบนโลกออนไลน์ที่มีปริมาณมหาศาล

2.1.2 รากที่สองในระบบจำนวนจริง รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

บทนิยาม 2

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2=x$

เนื่องจากกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ จะเป็นจำนวนจริงลบไม่ได้ ดังนั้น จะมีรากที่สองของจำนวนจริงบวกหรือศูนย์เท่านั้น นั่นคือ x ในบทนิยามข้างต้นต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เช่น

4 เป็นรากที่สองของ 16 เพราะ $4^2 = 16$

$-\frac{1}{3}$ เป็นรากที่สองของ $\frac{1}{9}$ เพราะ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

0 เป็นรากที่สองของ 0 เพราะ $0^2 = 0$

ถ้า $x \geq 0$ แล้ว x จะมีรากที่สองที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เรียกรากนี้ว่า **รากที่สองที่ไม่เป็นจำนวนลบ**ของ x และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{x}$ โดยเครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ เรียกว่า **เครื่องหมายกรณฑ์ (radical sign)**

เมื่อ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $(-y)^2 = y^2$ ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง y ยกกำลังสอง แล้วได้ x ก็จะมีจำนวนจริง $-y$ ที่ยกกำลังสองแล้วได้ x ด้วย

ดังนั้น สำหรับ $x > 0$ จะมีรากที่สองของ x สองรากคือ $\sqrt{x}$ และ $-\sqrt{x}$ โดยที่ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนบวก และ $-\sqrt{x}$ เป็นจำนวนลบ

ถ้า $x = 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงจำนวนเดียว คือ 0 เป็นรากที่สองของ x
นั่นคือ $\sqrt{0} = 0$
ถ้า $x < 0$ แล้วจะไม่มีรากที่สองของ x ที่เป็นจำนวนจริง
ดังนั้น $\sqrt{x} = y$ เมื่อ $x \geq 0$ หมายความว่า $y^2 = x$ และ $y \geq 0$

ตัวอย่างที่ 3

จงหา

1) รากที่สองของ 16
2) รากที่สองของ $\frac{1}{9}$
3) รากที่สองของ 2
4) รากที่สองของ 8

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $4^2 = 16$ และ $(-4)^2 = 16$

ดังนั้น รากที่สองของ 16 คือ 4 และ -4

2) เนื่องจาก $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ และ $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

ดังนั้น รากที่สองของ $\frac{1}{9}$ คือ $\frac{1}{3}$ และ $-\frac{1}{3}$

3) เนื่องจาก $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ และ $\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$

ดังนั้น รากที่สองของ 2 คือ $\sqrt{2}$ และ $-\sqrt{2}$

4) เนื่องจาก $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$ และ $\left(-2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

ดังนั้น รากที่สองของ 8 คือ $2\sqrt{2}$ และ $-2\sqrt{2}$ ■

ตัวอย่างที่ 4

จงหา

1) $\sqrt{9}$

2) $\frac{1}{\sqrt{25}}$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $3^2 = 9$ และ $3 \geq 0$ ดังนั้น $\sqrt{9} = 3$

2) เนื่องจาก $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ และ $\frac{1}{5} \geq 0$ ดังนั้น $\frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$ ■

ทฤษฎีบท 2

ให้ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ จะได้

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

ทฤษฎีบท 3

ให้ $x \geq 0$ และ $y > 0$ จะได้

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

ตัวอย่างที่ 5

จงหา

1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}$

2) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$

วิธีทำ 1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{7 \times 6} = \sqrt{42}$

2) $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{14}{2}} = \sqrt{7}$ ■

ในกรณีทั่วไป รากที่ n ของจำนวนจริง มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 3

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1
y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

ตัวอย่างที่ 6

จงพิจารณาว่า

1) 2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 หรือไม่ เพราะเหตุใด
2) -2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 หรือไม่ เพราะเหตุใด
3) -3 เป็นรากที่ 5 ของ -243 หรือไม่ เพราะเหตุใด
4) 3 เป็นรากที่ 5 ของ -243 หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ 1) 2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 เพราะ $2^4 = 16$

2) -2 เป็นรากที่ 4 ของ 16 เพราะ $(-2)^4 = 16$

3) -3 เป็นรากที่ 5 ของ -243 เพราะ $(-3)^5 = -243$

4) 3 ไม่เป็นรากที่ 5 ของ -243 เพราะ $3^5 = 243$ และ $243 \neq -243$

ตัวอย่างที่ 7

จงหา

1) รากที่ 4 ของ 16

2) รากที่ 5 ของ -243

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $2^4 = 16$ และ $(-2)^4 = 16$
ดังนั้น รากที่ 4 ของ 16 มีสองรากคือ 2 และ -2

2) เนื่องจาก $(-3)^5 = -243$
ดังนั้น รากที่ 5 ของ -243 มีรากเดียวคือ -3 ■

ค่าหลักของรากที่ n

บทนิยาม 4

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1
y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1. y เป็นรากที่ n ของ x และ
2. $xy \geq 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ x หรือ ค่าหลักของรากที่ n ของ x

หมายเหตุ 1. การระบุกรณฑ์ที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ทำได้โดยการเขียน n เยื้องทางด้านซ้ายของเครื่องหมายกรณฑ์ ดังนี้ $\sqrt[n]{\ }$ และจะเรียก n ว่าเป็น **อันดับที่** หรือ **ดัชนี (index)** ของกรณฑ์ แต่ถ้า $n = 2$ นิยมเขียน $\sqrt{\ }$ แทน $\sqrt[2]{\ }$

2. จากบทนิยาม 4 จะได้ว่า ถ้า y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x แล้ว x และ y เป็นจำนวนจริงบวกทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนจริงลบทั้งคู่ หรือเป็นศูนย์ทั้งคู่

ตัวอย่างที่ 8

จงหา

1) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16
2) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -125
3) ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -5
4) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ -16

วิธีทำ 1) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16 คือ 2

2) ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -125 คือ -5

3) ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -5 คือ $\sqrt[7]{-5}$

4) ไม่มีค่าหลักของรากที่ 4 ของ -16 ในระบบจำนวนจริง เนื่องจากไม่มีรากที่ 4 ของ -16 ในระบบจำนวนจริง กล่าวคือ ไม่มีจำนวนจริง y ซึ่ง $y^4 = -16$

ตัวอย่างที่ 9

จงหา

1) $\sqrt[3]{8}$
2) $\sqrt[5]{-1}$
3) $\sqrt[4]{16}$
4) $\sqrt[3]{-1000}$

วิธีทำ 1) $\sqrt[3]{8} = 2$

2) $\sqrt[5]{-1} = -1$

3) $\sqrt[4]{16} = 2$

4) $\sqrt[3]{-1000} = -10$

สมบัติของรากที่ n

ทฤษฎีบท 4

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n แล้ว

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

ทฤษฎีบท 5

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

หมายเหตุ 1. ถ้า $x<0$ หรือ $y<0$ แล้วทฤษฎีบท 4 และ 5 จะเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกเท่านั้น

2. ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวกแล้ว $\sqrt[n]{-x}=-\sqrt[n]{x}$

3. ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้วจะได้ว่า

1) $\sqrt[n]{x^n}=|x|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

2) $\sqrt[n]{x^n}=x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

เช่น $\sqrt[8]{(-2)^8}=|-2|=2$

$\sqrt[9]{(-2)^9}=-2$

ตัวอย่างที่ 10

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}$

2) $\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{3}$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{6}}$

วิธีทำ 1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2\times3}=\sqrt[3]{6}$

2) $\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{3}=-\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}=-\sqrt[3]{2\times3}=-\sqrt[3]{6}$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\dfrac{72}{6}}=\sqrt[3]{12}$

การหาผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

จำนวนจริงในรูปกรณฑ์ที่มีอันดับที่เดียวกันและมีจำนวนภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์เป็นจำนวนเดียวกันจะบวกลบกันได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 11

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

2) $4\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}$

วิธีทำ 1) $2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2} = (2+5-4)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

2) $$\begin{aligned} 4\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}} &= 4\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= 4\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= \left(4+\frac{2}{3}\right)\sqrt{3} \\ &= \frac{14}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 12

จงเขียน $\left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ โดยสมบัติการแจกแจงในระบบจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right) &= \left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt{5}+7\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}\right) \\ &= 15+7\sqrt{10}-9\sqrt{10}-42 \\ &= -27-2\sqrt{10} \end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัด 2.1ก

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

1) $\frac{2^{-3}3^{-5}}{3^{-5}2^{0}}$
2) $\frac{x^{9}(2x)^{4}}{x^{3}}$
3) $b^{4}\left(\frac{1}{3}b^{2}\right)\left(12b^{-8}\right)$
4) $\left(a^{-5}b^{7}\right)\left(a^{-2}b^{-7}c^{0}\right)$
5) $\left(2ab^{-1}\right)\left(ab^{2}\right)^{-2}$
6) $\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{2}\right)^{-4}$
7) $\left(\frac{1}{3a^{2}b^{-3}}\right)^{-2}$
8) $\frac{\left(x^{2}y^{3}\right)\left(xy^{4}\right)^{-3}}{x^{2}y}$

2. ให้ $x>0, x\neq 1$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จให้ยกตัวอย่างค้าน

1) $\frac{1}{x^{-n}} = x^{n}$
2) $\frac{x^{m}}{x^{-n}} = x^{m-n}$
3) $\frac{1}{x^{m}}\cdot\frac{1}{x^{n}} = x^{m-n}$
4) $x^{m}+x^{n} = x^{m+n}$
5) $x^{m}>1$ เมื่อ $x>1$
6) $x^{m}>1$ เมื่อ $0<x<1$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt[3]{64}$
2) $\sqrt[4]{256}$
3) $\frac{3}{\sqrt[3]{-27}}$
4) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$
5) $\sqrt{8x^{2}}$
6) $\sqrt[4]{16x^{8}}$

4. จงเขียนจำนวนจริงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

2) $\sqrt{\frac{3}{20}}$

3) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}}$

4) $\frac{\sqrt{96}}{2\sqrt{12}}$

5) $\frac{3\sqrt{8}}{4\sqrt{12}}$

6) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}}$

5. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\left(\sqrt{72}-3\sqrt{5}\right)+\left(3\sqrt{20}+\sqrt{50}\right)$

2) $3\sqrt{5}\left(\sqrt{10}+2\sqrt{5}\right)$

3) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

4) $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(2\sqrt{5}-1\right)$

5) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)$

6) $\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)$

2.1.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

สำหรับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะที่จะกล่าวต่อไปนี้ จะเริ่มจากบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น $\frac{1}{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ดังนี้

บทนิยาม 5

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ถ้า a มีรากที่ n แล้ว

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

ในกรณีที่ $a \geq 0$ สามารถนิยาม $a^{\frac{1}{n}}$ ได้เสมอ
ในกรณีที่ $a < 0$ จะนิยามเฉพาะกรณีที่ n เป็นจำนวนคี่

เช่น $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 6

ให้ a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะ เขียน $r = \frac{p}{q}$ โดยที่ p, q เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $q > 0$ และ ห.ร.ม. ของ p และ q เป็น 1 ถ้า $a^{\frac{1}{q}}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

หมายเหตุ 1. จากบทนิยาม เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะนิยามเมื่อเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้นและ $a^{\frac{1}{q}}$ ต้องเป็นจำนวนจริง

เช่น $(-8)^{\frac{14}{6}} = (-8)^{\frac{7}{3}} = \left(\sqrt[3]{-8}\right)^7 = (-2)^7 = -128$

แต่ $(-9)^{\frac{3}{2}}$ ไม่นิยาม เพราะ $(-9)^{\frac{1}{2}}$ ไม่เป็นจำนวนจริง

2. ในกรณีที่ $a = 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก สามารถนิยาม $0^r = 0$ แต่จะไม่นิยาม 0^r เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะลบหรือศูนย์

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะมีสมบัติดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6

ให้ m และ n เป็นจำนวนตรรกยะ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 โดยที่ a^m, a^n และ b^n เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ตัวอย่างที่ 13

จงเขียน $\left(27a^3\right)^{\frac{1}{6}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $a>0$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\left(27a^3\right)^{\frac{1}{6}} &= (27)^{\frac{1}{6}}\left(a^3\right)^{\frac{1}{6}}\\ &= \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}}\left(a^3\right)^{\frac{1}{6}}\\ &= 3^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\\ &= (3a)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 14

จงเขียน $\dfrac{\left(8ab^2\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(16a^2b^2\right)^{\frac{1}{4}}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ $a>0$ และ $b>0$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{\left(8ab^2\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(16a^2b^2\right)^{\frac{1}{4}}} &= \frac{8^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}}\cdot a^{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}\cdot b^{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)}\\ &= a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}\\ &= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}}\\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลัง และการแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์

การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลัง และการแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์ สามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับเลขยกกำลัง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 15

จงเขียน $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3} = \sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{3^2\times 3}-\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$= (2+3-1)\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 16

จงเขียน $3(5)^{\frac{1}{3}}-4(40)^{\frac{1}{3}}+(1600)^{\frac{1}{6}}-10\left(\frac{8}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ เนื่องจาก $4(40)^{\frac{1}{3}} = 4\left(2^3\cdot 5\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 4\left(2^{3\cdot\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)$

$= 8\left(5^{\frac{1}{3}}\right)$

$$(1600)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6 \cdot 5^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \left(2^{6\cdot\frac{1}{6}}\right)\left(5^{2\cdot\frac{1}{6}}\right)$$

$$= 2\left(5^{\frac{1}{3}}\right)$$

และ $$10\left(\frac{8}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 10\left(\frac{2^3}{5^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 10\left(\frac{2^3\cdot 5}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 10\left(\frac{2^{3\cdot\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}{5^{3\cdot\frac{1}{3}}}\right)$$

$$= \frac{10}{5}(2)\left(5^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= 4\left(5^{\frac{1}{3}}\right)$$

ดังนั้น $$3(5)^{\frac{1}{3}} - 4(40)^{\frac{1}{3}} + (1600)^{\frac{1}{6}} - 10\left(\frac{8}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 3\left(5^{\frac{1}{3}}\right) - 8\left(5^{\frac{1}{3}}\right) + 2\left(5^{\frac{1}{3}}\right) - 4\left(5^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= (3-8+2-4)5^{\frac{1}{3}}$$

$$= -7\left(5^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= -7\sqrt[3]{5}$$

ตัวอย่างที่ 17

จงเขียน $5\sqrt[3]{2}\times 7\sqrt{3}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ $5\sqrt[3]{2}\times 7\sqrt{3} = 5\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\times 7\left(3^{\frac{1}{2}}\right)$

$= 5\times 2^{\frac{2}{6}}\times 7\times 3^{\frac{3}{6}}$

$= 5\left(2^{2}\right)^{\frac{1}{6}}\times 7\left(3^{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

$= 35\left(4\times 27\right)^{\frac{1}{6}}$

$= 35\sqrt[6]{108}$

ตัวอย่างที่ 18

จงเขียน $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

วิธีทำ $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่างที่ 19

จงหาร $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}$ ด้วย $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$ และเขียนคำตอบในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}\div\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} &= \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{2+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{5-4}{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2}
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างข้างต้น ให้ $\sqrt{3}\approx 1.732$ จะประมาณค่าของ $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1}\div\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ ด้วย $\frac{1}{1.732+1}=\frac{1}{2.732}$ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณได้ยาก จึงนิยมทำให้ตัวส่วนอยู่ในรูปไม่ติดกรณฑ์

จะได้ $\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\approx\frac{0.732}{2}=0.366$

ตัวอย่างที่ 20

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{2x+3} = x$

วิธีทำ จาก $\sqrt{2x+3} = x$

จะได้ $2x+3 = x^2$

$x^2-2x-3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

ดังนั้น $x = 3$ หรือ $x = -1$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าค่าใดสอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

กรณี $x = 3$

แทน x ด้วย 3 ใน $\sqrt{2x+3}$

จะได้ $\sqrt{(2\times3)+3} = \sqrt{9} = 3$

แสดงว่า 3 สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

กรณี $x = -1$

แทน x ด้วย -1 ใน $\sqrt{2x+3}$

จะได้ $\sqrt{2(-1)+3} = \sqrt{1} = 1$ ซึ่ง $1 \neq -1$

แสดงว่า -1 ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการที่กำหนดให้คือ $\{3\}$ ■

หมายเหตุ การแก้สมการโดยวิธียกกำลังสองจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ คำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบของสมการที่ยกกำลังสองแล้ว ซึ่งบางคำตอบอาจไม่ใช่คำตอบของสมการเดิม จึงต้องมีการตรวจสอบคำตอบที่ได้เสมอว่าเป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้หรือไม่

ตัวอย่างที่ 21

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x+7}-\sqrt{8-2x}=1$

วิธีทำ จาก $\sqrt{x+7}-\sqrt{8-2x}=1$

จะได้ $\sqrt{8-2x}=\sqrt{x+7}-1$

$8-2x=x+7-2\sqrt{x+7}+1$

$8-2x=x+8-2\sqrt{x+7}$

$2\sqrt{x+7}=3x$

$4(x+7)=9x^2$

$9x^2-4x-28=0$

$(9x+14)(x-2)=0$

ดังนั้น $x=2$ หรือ $x=-\frac{14}{9}$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าค่าใดบ้างสอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

กรณี $x=2$

แทน x ด้วย 2 ใน $\sqrt{x+7}-\sqrt{8-2x}$

จะได้ $\sqrt{2+7}-\sqrt{8-(2\times 2)}=\sqrt{9}-\sqrt{4}$

$=3-2$

$=1$

แสดงว่า 2 สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

กรณี $x=-\frac{14}{9}$

แทน x ด้วย $-\frac{14}{9}$ ใน $\sqrt{x+7}-\sqrt{8-2x}$

จะได้ $\sqrt{-\frac{14}{9}+7}-\sqrt{8-2\left(-\frac{14}{9}\right)}=\sqrt{\frac{49}{9}}-\sqrt{\frac{100}{9}}$

$=\frac{7}{3}-\frac{10}{3}$

$=-1$

แสดงว่า $-\frac{14}{9}$ ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการที่กำหนดให้คือ $\{2\}$

แบบฝึกหัด 2.1ข

1. จงหาค่าของ

1) $27^{\frac{2}{3}}$

2) $16^{-\frac{1}{4}}$

3) $(0.25)^{\frac{3}{2}}$

4) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$

5) $(-125)^{-\frac{1}{3}}$

6) $(-27)^{\frac{2}{3}}$

7) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$

8) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

2. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยที่เลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนบวก

1) $\left(\frac{27x^3}{y^6}\right)^{\frac{2}{3}}$

2) $\left(\frac{x^{-4}}{4y^6}\right)^{\frac{1}{2}}$

3) $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{3}{2}}}\right)^3$

4) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $5\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$

2) $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192}$

3) $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt[4]{64}$

4) $\sqrt{4x^3}-\sqrt{16x^5}+\sqrt{x^9}$

4. จงเขียนจำนวนจริงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

2) $\frac{40}{9\sqrt{5}-5\sqrt{7}}$

3) $\frac{7\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

4) $\frac{10\sqrt{6}-2\sqrt{7}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{7}}$

5. จงหาผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยคำตอบอยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

2) $\frac{18}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3) $\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1}-\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

6. จงเขียนกำลังสองของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{p+q}+\sqrt{p-q}$ โดยที่ $p \geq q \geq 0$

2) $3\sqrt{a^2+b^2}-2\sqrt{a^2-b^2}$ โดยที่ $a^2 > b^2$

3) $\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3}$ โดยที่ $x \geq \frac{1}{2}$

7. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและหาค่าประมาณของจำนวนต่อไปนี้ เมื่อ $\sqrt{2} \approx 1.41421$, $\sqrt{3} \approx 1.73205$, $\sqrt{5} \approx 2.23607$ และ $\sqrt{6} \approx 2.44949$

1) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1}$

2) $\frac{\sqrt{5}-2}{9-4\sqrt{5}}$

3) $\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $\sqrt{m}-8 = 0$

2) $\sqrt{5x+1}+6 = 10$

3) $\sqrt{r^2+5} = r$

4) $\sqrt{x+7} = x-5$

5) $\sqrt{x-7} = \sqrt{3x+1}$

6) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 2$

7) $\sqrt{x-3} = \sqrt{x}-3$

8) $\sqrt{x+12}+\sqrt{x} = 2$

9) $-\sqrt{x^2+21} = x+3$

10) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x-5} = 9$

11) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$

12) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

9. เมื่อ ค.ศ. 1609 – 1618 โยฮันเนส เคพเลอร์ (Johannes Kepler) นักดาราศาสตร์ชาวเยอรมัน ได้สร้างกฎของเคพเลอร์ (Kepler's Laws) ซึ่งสามารถหาระยะทางเฉลี่ยจากดาวเคราะห์ไปยังดวงอาทิตย์ได้จากสมการ $a = p^{\frac{2}{3}}$ เมื่อ a แทนระยะทางเฉลี่ยจากดาวเคราะห์ไปยังดวงอาทิตย์ มีหน่วยเป็น AU (Astronomical Unit) และ p แทนเวลาที่ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์ 1 รอบ มีหน่วยเป็นปี จงหาว่า

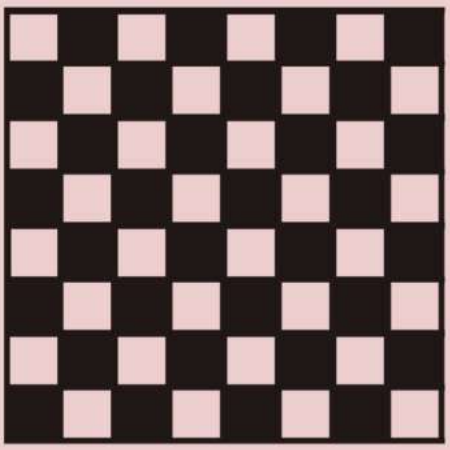
1) ดาวเนปจูนมีเวลาโคจรรอบดวงอาทิตย์ประมาณ 165 ปี จะมีระยะทางเฉลี่ยจากดาวเนปจูนไปยังดวงอาทิตย์เป็นเท่าใด
2) ดาวศุกร์มีระยะทางเฉลี่ยไปยังดวงอาทิตย์เป็น 0.72 AU ดาวศุกร์จะมีเวลาโคจรรอบดวงอาทิตย์กี่ปี

เสริมสมอง : ดาราศาสตร์

ระยะทาง 1 หน่วยดาราศาสตร์ (Astronomical Unit: AU) คือ ระยะทางเฉลี่ยจากโลกถึงดวงอาทิตย์ ซึ่งมีค่าประมาณ 1.496×10^{11} เมตร

กิจกรรม : ปัญหาพระราชา

ตามตำนานอินเดียโบราณ Sissa Ben Dahir เป็นขุนนางของพระราชา Shirham โดย Sissa ได้คิดค้นเกมที่ใช้เล่นบนกระดาน ซึ่งเรียกว่า “หมากรุก” ขึ้น



กระดานหมากรุก ขนาด 8×8

พระราชาตัดสินใจที่จะให้รางวัล Sissa สำหรับความทุ่มเทของเขา พระราชาจึงได้ตรัสถาม Sissa ว่าต้องการสิ่งใดเป็นรางวัล Sissa ได้คิดอย่างรอบคอบและขอสิ่งต่อไปนี้จากพระราชา

- ขอข้าว 1 เมล็ด สำหรับช่องที่ 1 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 2 เมล็ด สำหรับช่องที่ 2 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 4 เมล็ด สำหรับช่องที่ 3 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 8 เมล็ด สำหรับช่องที่ 4 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 16 เมล็ด สำหรับช่องที่ 5 ของกระดานหมากรุก

และเพิ่มเมล็ดข้าวในรูปแบบเดียวกันนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนครบทั้ง 64 ช่อง

พระราชาทรงตรัสว่า นี่คือคำขอที่เล็กน้อยมาก และตกลงจะมอบรางวัลให้ตามที่ Sissa ขอ

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เติมจำนวนเมล็ดข้าวลงในตารางให้สมบูรณ์

กระดานหมากรุกช่องที่	จำนวนเมล็ดข้าว	จำนวนเมล็ดข้าวสะสม
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2. ใช้ข้อมูลจากตารางในข้อ 1 เขียนฟังก์ชันแสดงจำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ n
3. พระราชาต้องหาเมล็ดข้าวจำนวนเท่าใดสำหรับช่องกระดานช่องสุดท้ายของกระดานหมากรุก
4. ใช้ข้อมูลจากตารางในข้อ 1 เขียนฟังก์ชันแสดงจำนวนเมล็ดข้าวสะสมช่องที่ 1 จนถึงช่องที่ n
5. จำนวนเมล็ดข้าวที่ Sissa จะได้รับทั้งหมดเป็นเท่าใด
6. ถ้าเมล็ดข้าว 1 เมล็ดหนัก 0.000008 กิโลกรัมโดยประมาณแล้ว จงหาน้ำหนักรวมของเมล็ดข้าวทั้งหมดที่ Sissa ขอจากพระราชา
7. ถ้าในแต่ละปีมีผลผลิตข้าวในโลกรวมทั้งหมดประมาณ 580 ล้านตัน แล้วจะต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ปี จึงจะมีจำนวนเมล็ดข้าวครบตามที่ Sissa ขอจากพระราชา (1 ตัน เท่ากับ 1,000 กิโลกรัม)

2.2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ในหัวข้อ 2.1 ได้กล่าวถึงบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ แต่ยังไม่มีบทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนอตรรกยะ เช่น $3^{\sqrt{2}}$

เนื่องจากรูปทศนิยมของ $\sqrt{2}$ เป็นทศนิยมไม่ซ้ำ ดังนี้

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

เมื่อใช้เครื่องคำนวณหาค่าของ 3^r เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะที่ใกล้เคียงกับค่าของ $\sqrt{2}$ จะได้ผลดังนี้

r	3^r
1.4	4.655537
1.41	4.706965
1.414	4.727695
1.4142	4.728734
1.41421	4.728786
1.414213	4.728801
⋮	⋮

ตารางที่ 1

r	3^r
1.5	5.196152
1.42	4.758961
1.415	4.732892
1.4143	4.729253
1.41422	4.728838
1.414214	4.728807
⋮	⋮

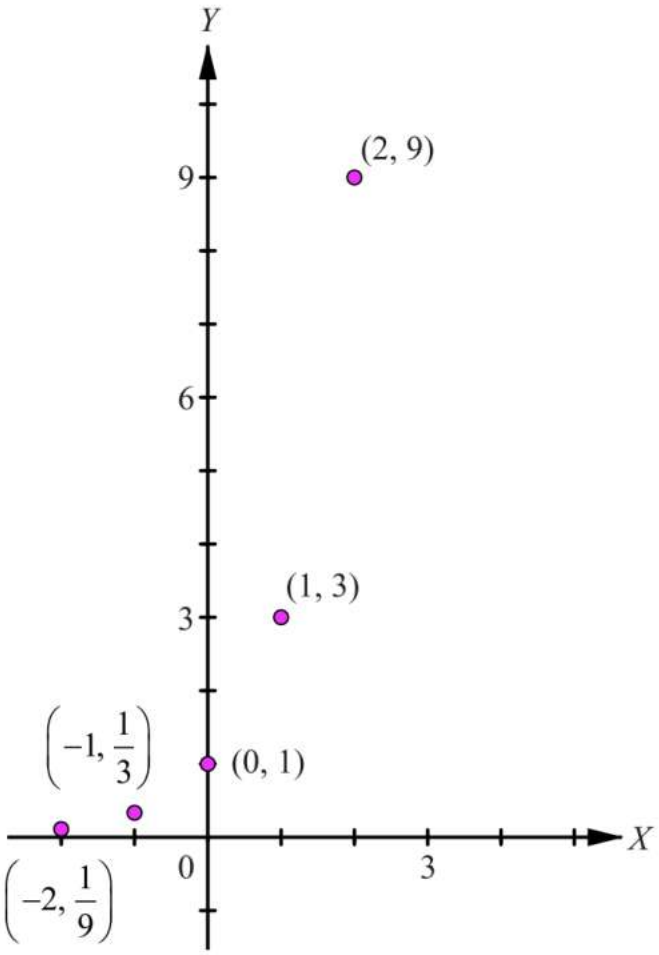
ตารางที่ 2

จะเห็นว่า เมื่อคำนวณค่าของ 3^r ต่อไปเรื่อย ๆ โดยแทน r ด้วยทศนิยมที่ใกล้เคียงกับค่าของ $\sqrt{2}$ ที่เพิ่มขึ้น ดังตารางที่ 1 จะได้ว่าค่าของ 3^r จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และเข้าใกล้ค่าค่าหนึ่ง เมื่อแทน r ด้วยทศนิยมที่ใกล้เคียงกับค่าของ $\sqrt{2}$ ที่ลดลง ดังตารางที่ 2 จะได้ว่าค่าของ 3^r จะลดลงเรื่อย ๆ และเข้าใกล้ค่าค่าหนึ่ง จากตารางทั้งสองพบว่า ค่าของ 3^r จะเข้าใกล้ค่าเดียวกัน ซึ่งจะกำหนดค่าให้เป็น $3^{\sqrt{2}}$ อาจกล่าวได้ว่า $3^{\sqrt{2}}$ สามารถประมาณค่าได้จาก 3^r เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะที่มีค่าใกล้ $\sqrt{2}$ มาก ๆ

ในทำนองเดียวกัน สามารถให้ความหมายของ 3^x เมื่อ x เป็นจำนวนอตรรกยะใด ๆ ได้ดังนี้

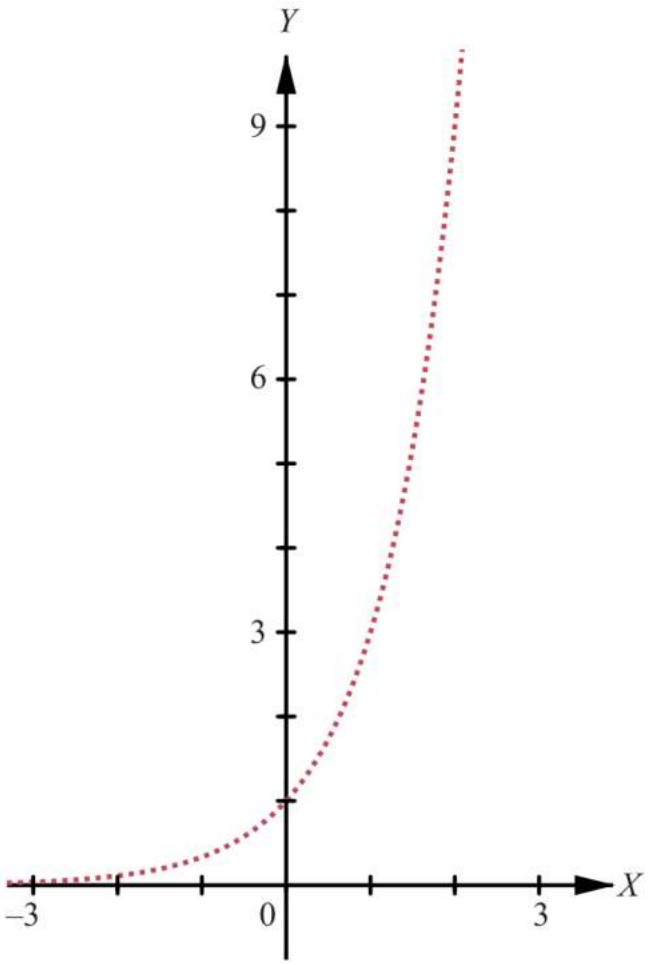
พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = 3^x$ เมื่อ $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ มีลักษณะดังรูปที่ 1

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



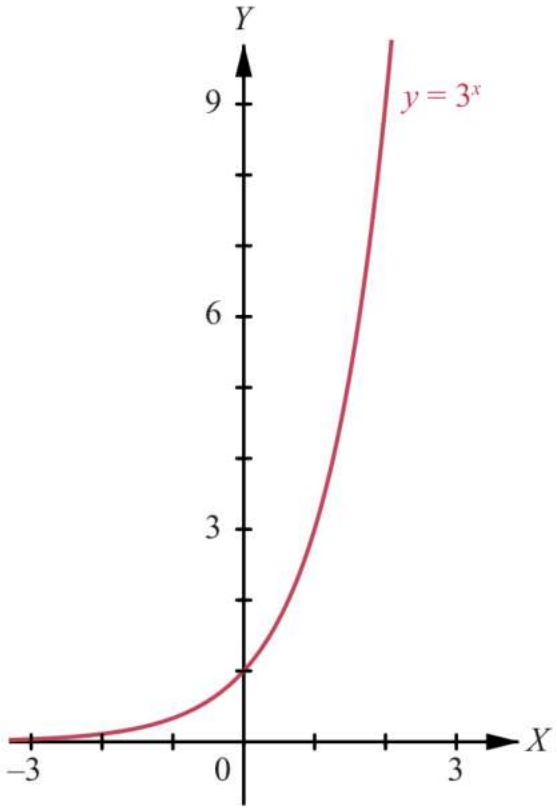
รูปที่ 1

ถ้าต้องการได้กราฟของฟังก์ชัน $y=3^x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ลองพิจารณาการเรียงตัวของจุดที่มีพิกัด $(r, 3^r)$ เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ จะเห็นว่ากราฟมีลักษณะดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

สำหรับจุดที่มีพิกัด $(x, 3^x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนอตรรกยะ ได้จากการประมาณจุดที่มีพิกัด $(r, 3^r)$ ที่อยู่ใกล้เคียง เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น กราฟของ $y=3^x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะเป็นกราฟเส้นเดียวไม่ขาดตอน มีลักษณะดังรูปที่ 3



รูปที่ 3

ฟังก์ชัน $y = 3^x$ เป็นตัวอย่างหนึ่งของ **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (exponential function)**

บทนิยาม 7

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = a^x\}$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

ข้อสังเกต 1. $f(x) = 1^x$ เป็นฟังก์ชันคงตัว เพราะว่า $1^x = 1$ ไม่เรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

2. จากบทนิยาม โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ เซตของจำนวนจริง

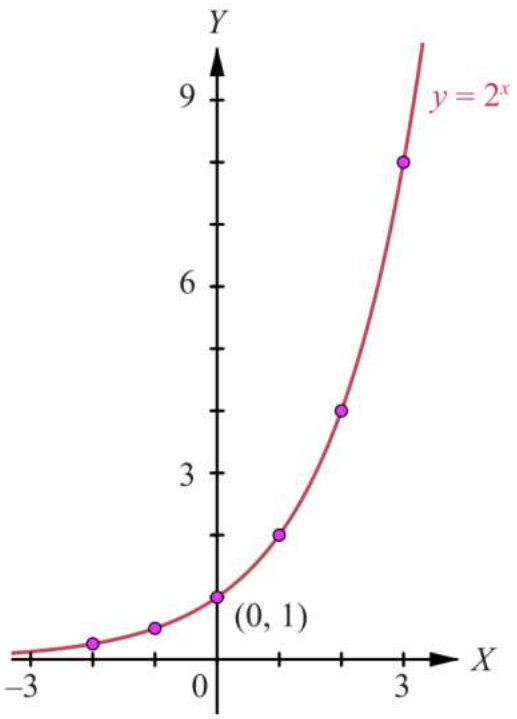
ตัวอย่างที่ 22

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = 2^x$ ได้ดังตาราง

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

จะได้ กราฟของ $y = 2^x$ เป็นดังนี้



จากกราฟในตัวอย่างข้างต้นพบว่า ค่าของ 2^x เพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ อย่างรวดเร็ว เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก และจะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0 เมื่อ x เป็นจำนวนลบและมีค่าลดลงเรื่อย ๆ ด้วยเหตุนี้ เรนจ์ของฟังก์ชัน $y = 2^x$ จึงเป็นช่วงเปิด $(0, \infty)$ หรือ $\mathbb{R}^+$

เนื่องจากเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น y จะมีค่าเพิ่มขึ้น ในกรณีนี้จะกล่าวว่า $y = 2^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนโดเมนของฟังก์ชันซึ่งคือเซตของจำนวนจริง

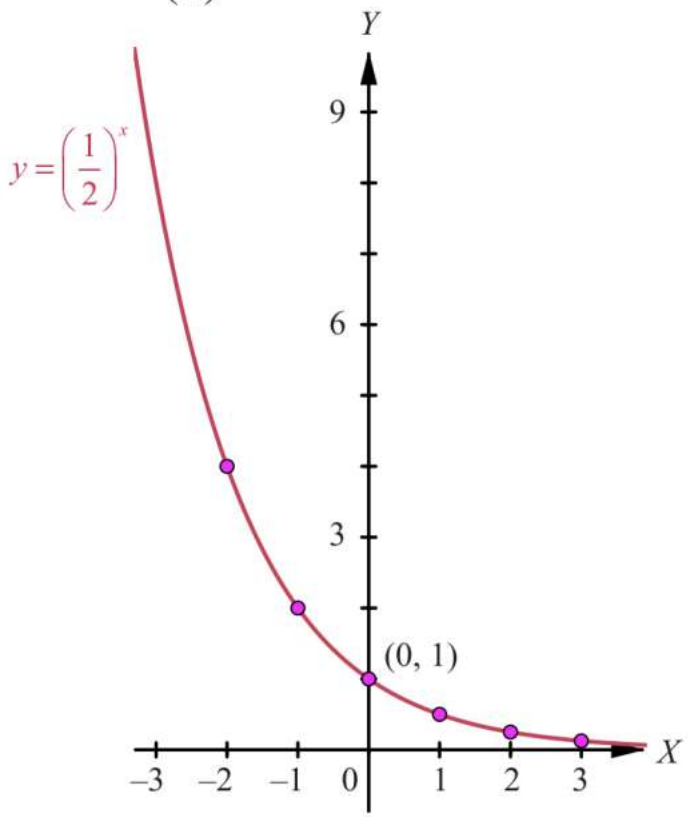
ตัวอย่างที่ 23

จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ได้ดังตาราง

x	–2	–1	0	1	2	3
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

จะได้ กราฟของ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นดังนี้

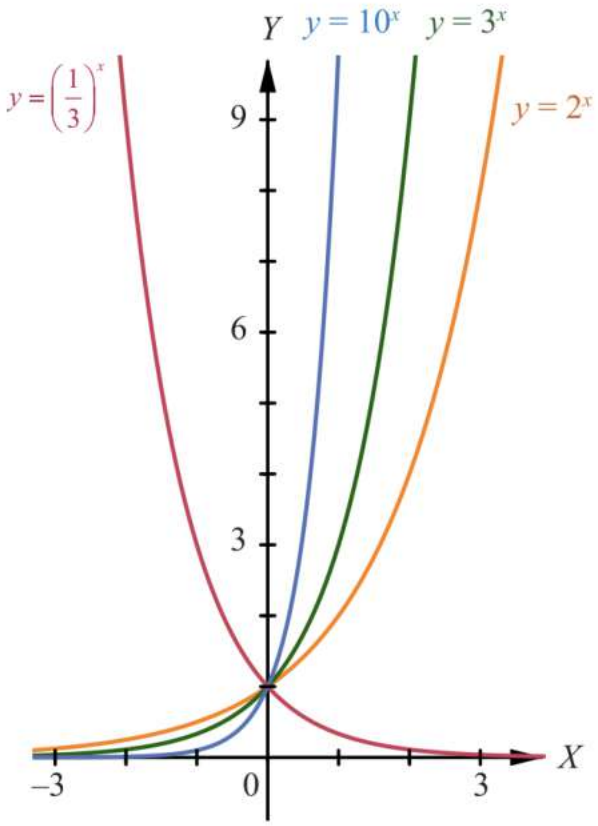


จากกราฟในตัวอย่างข้างต้นพบว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น y จะมีค่าลดลง ในกรณีนี้จะกล่าวว่า $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลดบนโดเมนของฟังก์ชันซึ่งคือเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 24

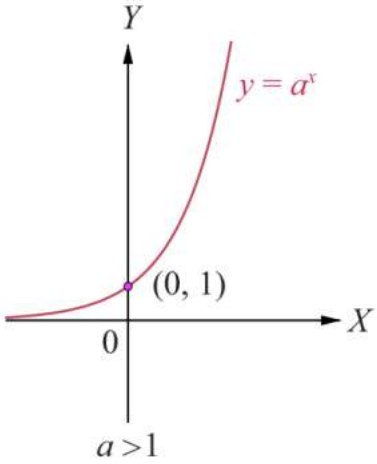
จงเขียนกราฟของ $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$ และ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ลงในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

วิธีทำ เขียนกราฟของ $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$ และ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ได้ดังนี้



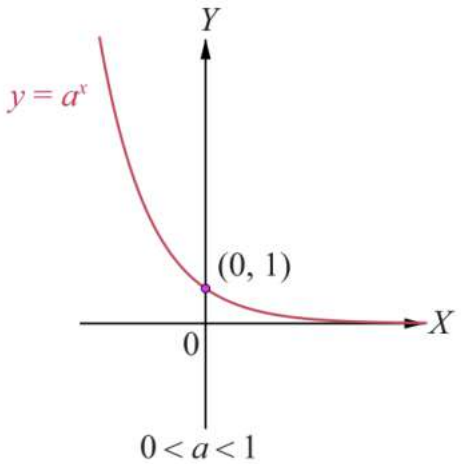
ข้อสังเกต 1. กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะผ่านจุด $(0, 1)$ เสมอ ทั้งนี้เพราะ $a^0 = 1$

2. ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และกราฟของ $y = a^x$ ไม่ตัดแกน X แต่เข้าใกล้เส้นตรง $y = 0$ เมื่อ x มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้กล่าวได้ว่า เส้นตรง $y = 0$ หรือแกน X เป็นเส้นกำกับแนวนอน ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด และกราฟของ $y = a^x$ ไม่ตัดแกน X แต่เข้าใกล้เส้นตรง $y = 0$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้กล่าวได้ว่า เส้นตรง $y = 0$ หรือแกน X เป็นเส้นกำกับแนวนอน ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5

3. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+$
4. จากสมบัติของฟังก์ชัน $1-1$ จะได้ว่า เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

$$a^x = a^y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = y$$

ในตัวอย่างต่อไปนี้ จะแสดงการเขียนกราฟของฟังก์ชันโดยอาศัยกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและเทคนิคการเลื่อนกราฟ

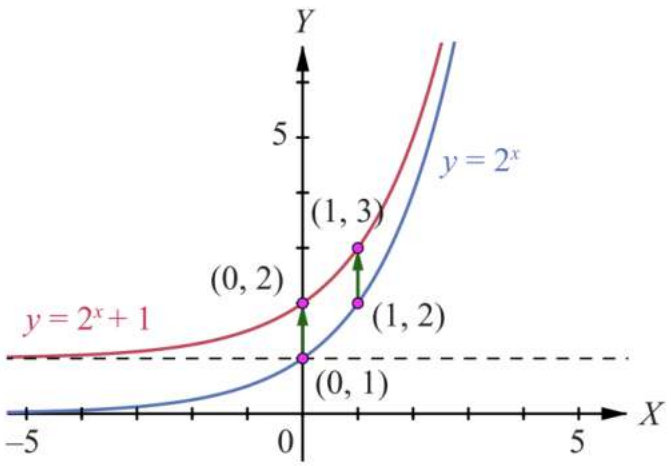
ตัวอย่างที่ 25

จงเขียนกราฟของแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้

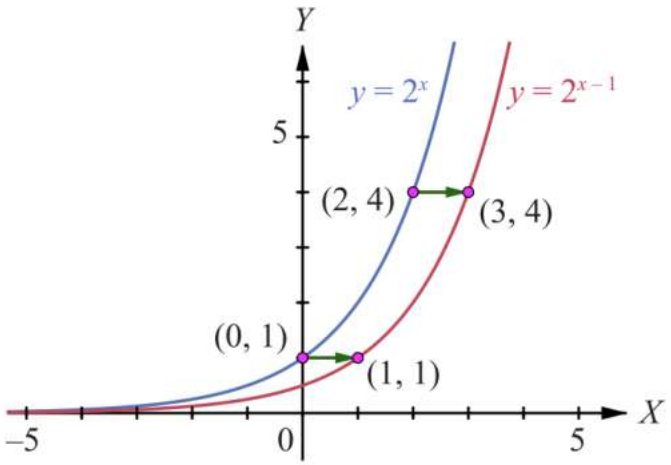
1) $f(x) = 2^x + 1$

2) $g(x) = 2^{x-1}$

วิธีทำ 1) เขียนกราฟ $f(x) = 2^x + 1$ โดยเริ่มต้นจากกราฟของ $y = 2^x$ และเลื่อนจุดทุกจุดขึ้นข้างบน 1 หน่วย จะได้กราฟของ f ดังรูป



2) เขียนกราฟ $g(x) = 2^{x-1}$ โดยเริ่มต้นจากกราฟของ $y = 2^x$ และเลื่อนทุกจุดไปทางขวา 1 หน่วย จะได้กราฟของ g ดังรูป



สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล

สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า **สมการเอกซ์โพเนนเชียล (exponential equation)** เช่นเดียวกัน อสมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง จะเรียกว่า **อสมการเอกซ์โพเนนเชียล (exponential inequality)** ในการแก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล จะใช้สมบัติความเป็นฟังก์ชัน $1-1$ ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลดของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ตัวอย่างที่ 26

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 81$

วิธีทำ เนื่องจาก $81 = 3^4 = \frac{1}{3^{-4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

จะได้ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $x = -4$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{-4\}$ ■

ตัวอย่างที่ 27

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\left(\frac{49}{9}\right)^{x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{2}}$

วิธีทำ จาก $\left(\frac{49}{9}\right)^{x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{2}}$

จะได้ $\left(\left(\frac{7}{3}\right)^{2}\right)^{x} = \left(\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\left(\frac{7}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{7}{3}\right)^{x}$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $2x = -\frac{3}{2}$

$x = -\frac{3}{4}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 28

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2^{2x} > 128$

วิธีทำ จาก $2^{2x} > 128$

จะได้ $2^{2x} > 2^{7}$

เนื่องจาก $f(x) = 2^{x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ $2x > 7$

$x > \frac{7}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$ ■

ตัวอย่างที่ 29

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3 \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$

วิธีทำ จาก $3 \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$

จะได้ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ เป็นฟังก์ชันลด

จะได้ $-1 \ge 3x$

$$x \le -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ ■

ตัวอย่างที่ 30

จงหาเซตคำตอบของสมการ $3^x = \frac{10}{3} - 3^{-x}$

วิธีทำ จาก $3^x = \frac{10}{3} - 3^{-x}$

$$3^x = \frac{10}{3} - \frac{1}{3^x}$$

$$3^{2x} = \frac{10}{3}\left(3^x\right) - 1$$

$$3\left(3^{2x}\right) = 10\left(3^x\right) - 3$$

$$3\left(3^{2x}\right) - 10\left(3^x\right) + 3 = 0$$

$$\left(3 \cdot 3^x - 1\right)\left(3^x - 3\right) = 0$$

จะได้ $3\cdot 3^x - 1 = 0$ หรือ $3^x - 3 = 0$

$3^x = \frac{1}{3}$ หรือ $3^x = 3$

นั่นคือ $x = -1$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{-1, 1\}$ ■

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1) $y = 5^x$

2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

3) $y = 4^{2x}$

4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

5) $y = 3^{-x}$

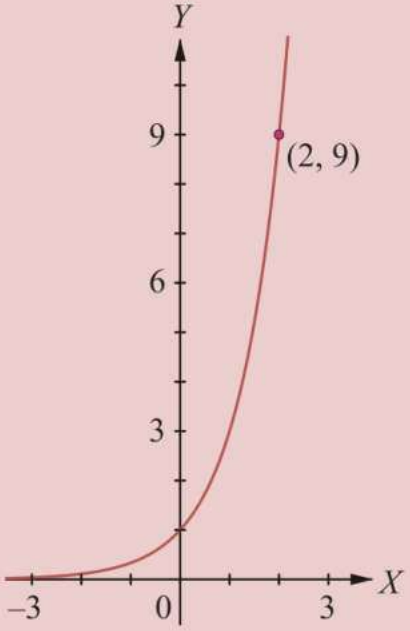
6) $y = 2^{-2x}$

7) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

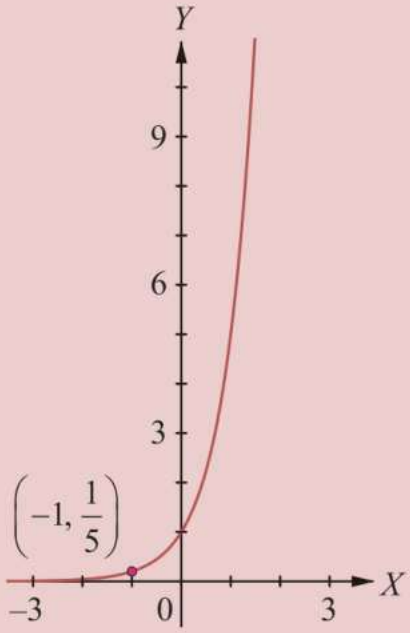
8) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

2. กราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลใด

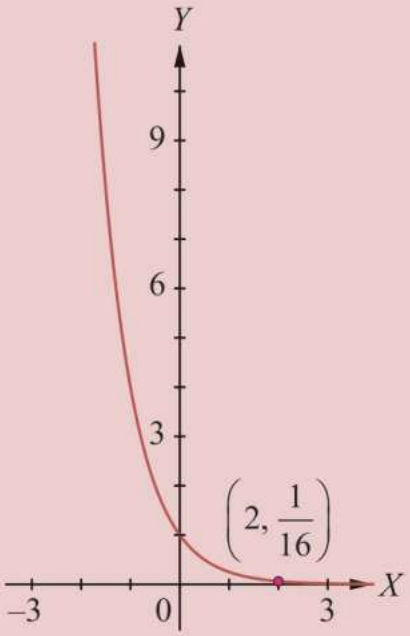
1)



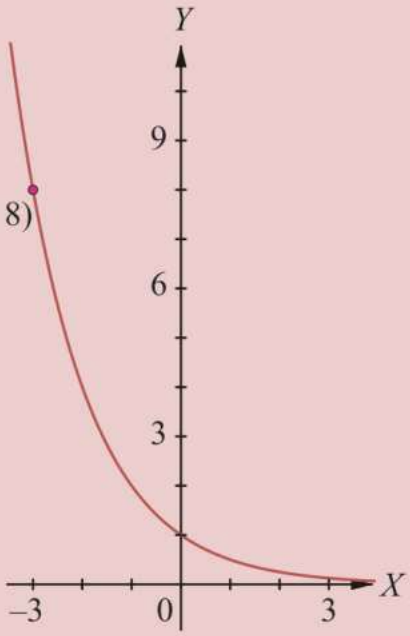
2)



3)



4)



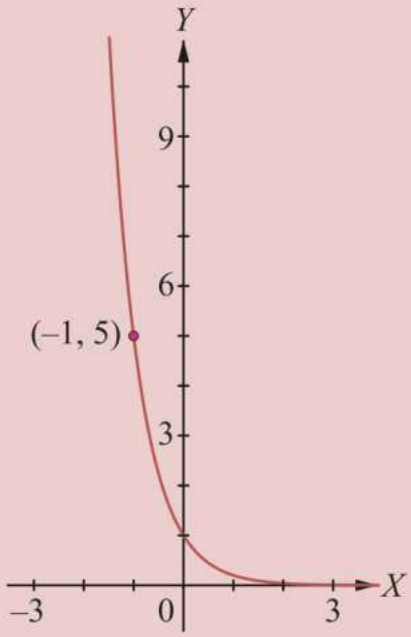
3. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = 2^x - 3$
2) $y = 2^{x-3}$
3) $y = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$
4) $y = 10^{x+3}$
5) $y = 10^{-x}$

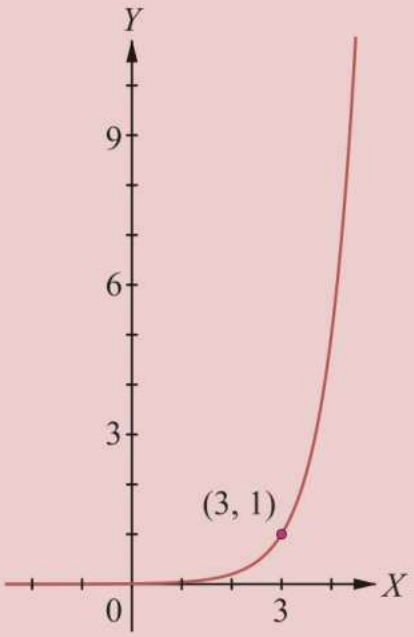
4. จงจับคู่ฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้กับกราฟในข้อ (ก) – (จ)

1) $y = 5^x$
2) $y = 5^{-x}$
3) $y = 5^x + 3$
4) $y = 5^{x-3}$
5) $y = 5^{x+1} - 4$

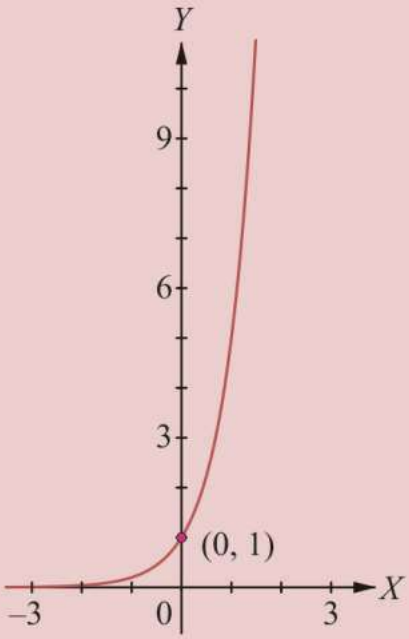
(ก)



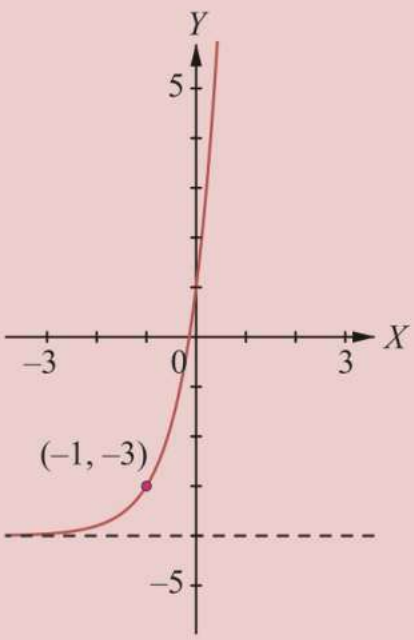
(ข)



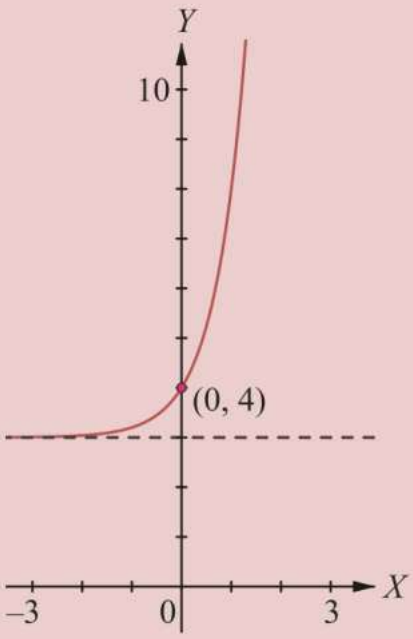
(ค)



(ง)



(จ)



5. ถ้า $f(x)=2^{-x}$ และ $g(x)=3^{x}$ แล้ว จงหาค่าของ

1) $f(2)$
2) $g(3)$
3) $f(0)+g(0)$
4) $g(4)-f(4)$
5) $f(1)\cdot g(1)$
6) $\dfrac{f(3)}{g(2)}$
7) $(f\circ g)(1)$
8) $(g\circ f)(1)$

6. จงหาเซตคำตอบของสมการหรืออสมการต่อไปนี้

1) $10^{x}=100$
2) $3^{x}=\dfrac{1}{27}$
3) $16^{x}=4$
4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=16$
5) $4^{-x}=\dfrac{1}{64}$
6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}=64$
7) $5^{x}\leq 125$
8) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}\geq\dfrac{81}{16}$

9) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} < 64$

10) $\frac{27}{125} < \left(\frac{5}{3}\right)^{x} \leq 1$

7. จงแก้สมการต่อไปนี้

1) $x^2 2^x - 2^x = 0$

2) $2^{2x+2} - 9\left(2^x\right) + 2 = 0$

3) $3^{2x+1} + 9 = 28\left(3^x\right)$

8. กำหนดให้ $q = 2\left(3^t\right)$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของแบคทีเรียกับเวลา เมื่อ t มีหน่วยเป็นชั่วโมง และ q มีหน่วยเป็นพันเซลล์ จงหาจำนวนเริ่มต้นของแบคทีเรียและจำนวนของแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที 30 นาที และ 1 ชั่วโมง

9. ธาตุเรเดียม-226 มีครึ่งชีวิต 1,600 ปี ถ้าเดิมมีธาตุเรเดียมอยู่ q_0 มิลลิกรัม และ q เป็นปริมาณของเรเดียมที่เหลือเมื่อเวลาผ่านไป t ปี โดยที่ q_0 และ q มีความสัมพันธ์เป็น $q = q_0 2^{kt}$ แล้ว จงหา k

กิจกรรม : ซอมบี้บุก

สมมติว่าเกิดเหตุการณ์ซอมบี้บุกโรงเรียน เริ่มจากซอมบี้ 5 ตัว บุกเข้ามาในโรงเรียน และกำหนดให้ในแต่ละวัน ซอมบี้แต่ละตัวสามารถแพร่เชื้อให้กับผู้ที่ยังไม่ได้รับเชื้อจำนวน 2 คน โดยผู้ที่ได้รับเชื้อจะกลายเป็นซอมบี้ด้วย

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. จากสถานการณ์ข้างต้น นักเรียนคิดว่าจำนวนซอมบี้กับเวลามีความสัมพันธ์ลักษณะใด
2. จากสถานการณ์ข้างต้น ให้นักเรียนเติมตารางด้านล่างให้สมบูรณ์

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	5
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3. นำข้อมูลในข้อ 2 ไปเขียนกราฟโดยให้แกน X แสดงเวลา (วัน) และแกน Y แสดงจำนวนซอมบี้ (ตัว)
4. ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้มีกราฟเป็นลักษณะใด เพราะเหตุใด
5. เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้
6. สมมติประเทศไทยมีจำนวนประชากร 69,000,000 คน คนทั้งประเทศจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด
7. สมมติจำนวนประชากรโลกมีทั้งหมด 7,570,000,000 คน คนทั้งโลกจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด
8. ถ้าตอนเริ่มต้นมีซอมบี้ 12 ตัว และซอมบี้เคลื่อนที่เร็ว ทำให้ซอมบี้แต่ละตัวสามารถแพร่เชื้อให้กับผู้ที่ยังไม่ได้รับเชื้อจำนวน 5 คนต่อวัน คนทั้งโลกจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด

9. ถ้าให้นักเรียนเลือกระหว่างสถานการณ์ที่มีจำนวนซอมบี้เริ่มต้นมาก ๆ โดยซอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่ช้า ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนไม่มาก กับสถานการณ์ที่มีจำนวนซอมบี้เริ่มต้นน้อย แต่ซอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่เร็ว ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนมาก นักเรียนจะเลือกสถานการณ์ใด เพราะเหตุใด
10. สมมติว่าสามารถกักบริเวณทำให้ซอมบี้หยุดการแพร่เชื้อได้ ในขณะที่ซอมบี้มีจำนวน 7,500,000,000 ตัว และมีกลุ่มนักวิทยาศาสตร์คิดค้นสารที่ทำให้ซอมบี้กลับมาเป็นคนได้เมื่อพ่นสารลงไปบนตัวซอมบี้ โดยสารนี้ได้ผล 20% นั่นคือ ซอมบี้ที่ได้รับสารนี้ 100 ตัว จะกลับมาเป็นคนได้ 20 คน ถ้าพ่นสารให้ซอมบี้หนึ่งครั้งต่อวัน ในเวลา 10 วัน จะมีซอมบี้เหลือเท่าใด ให้นักเรียนเติมตารางด้านล่างให้สมบูรณ์

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	7,500,000,000
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

11. นำข้อมูลในข้อ 10 ไปเขียนกราฟโดยให้แกน X แสดงจำนวนวันที่พ่นสาร (วัน) และแกน Y แสดงจำนวนซอมบี้ที่เหลือ (ตัว)
12. ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้ที่เหลือมีกราฟเป็นลักษณะใด เพราะเหตุใด
13. เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้ที่เหลือ
14. ถ้าให้พ่นสารเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ ซอมบี้ทั้งหมดจะกลับไปเป็นคนภายในเวลากี่วัน
15. จากฟังก์ชันแสดงการเพิ่มขึ้นและการลดลงของจำนวนซอมบี้ นักเรียนคิดว่ามีอะไรที่เหมือนกันและอะไรที่ต่างกัน

2.3 ฟังก์ชันลอการิทึม

ให้ a เป็นค่าคงตัว โดย $a>0$ และ $a\neq 1$ เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,y=a^x\}$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+$ ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+$ ไป $\mathbb{R}$ โดยฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x=a^y\}$

จาก $x=a^y$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $y=f(x)$ ได้ โดยกำหนดสัญลักษณ์ให้เป็น $y=\log_a x$ อ่านว่า “ลอการิทึมเอกซ์ฐานเอ” หรือ “ล็อกเอกซ์ฐานเอ” นั่นคือ

$$x=a^y \text{ ก็ต่อเมื่อ } y=\log_a x$$

จะเห็นว่าในการเขียน $\log_a x$ นั้น $x>0$ เสมอ ดังนั้น ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเขียนใหม่ได้เป็น $\{(x, y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\,|\,y=\log_a x\}$

บทนิยาม 8

ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\{(x, y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\,|\,y=\log_a x\}$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a>0$ และ $a\neq 1$

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y ที่เขียนในรูป $x = a^y$ และ $y = \log_a x$ มีความหมายเช่นเดียวกัน ดังนั้น สมการที่แสดงการเท่ากันของจำนวนจริงกับจำนวนที่เขียนในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นจำนวนจริงบวก จึงอาจเขียนในรูปลอการิทึมได้ เช่น

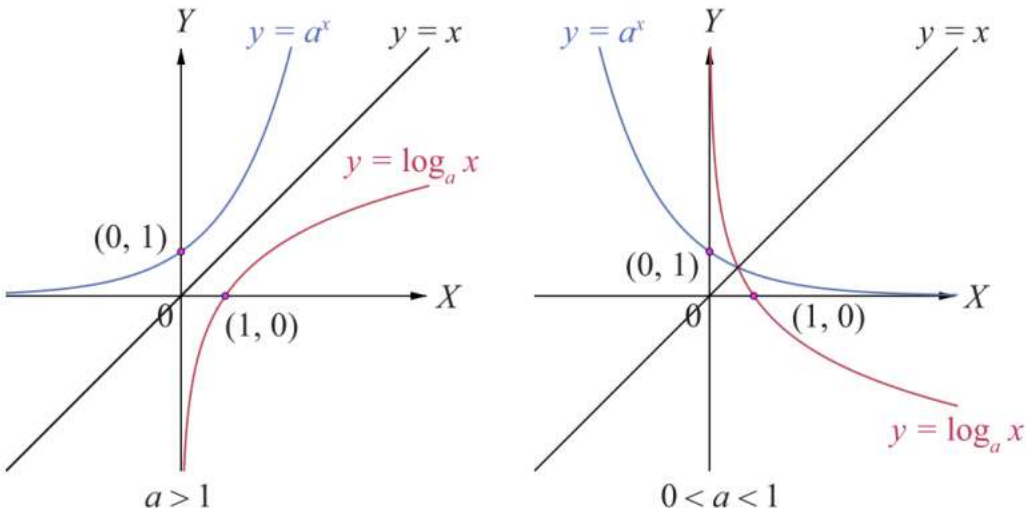
$9 = 3^2$ เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น $2 = \log_3 9$

$1000 = 10^3$ เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น $3 = \log_{10} 1000$

$7 = 49^{\frac{1}{2}}$ เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น $\frac{1}{2} = \log_{49} 7$

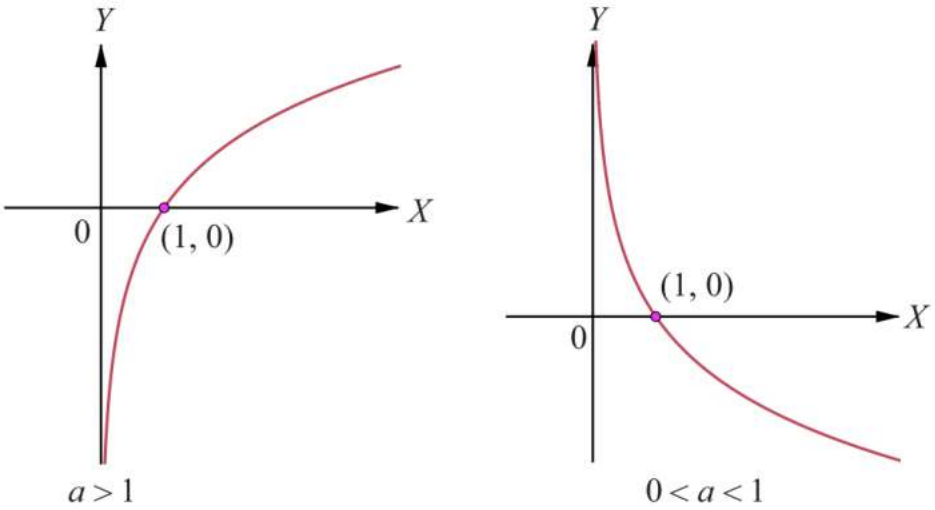
$8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$

กราฟของ $y = \log_a x$ เมื่อกำหนดค่า a เขียนได้จากกราฟของ $y = a^x$ แล้วสะท้อนข้ามเส้นตรง $y = x$ โดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชันผกผัน ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

นั่นคือ กราฟของ $y = \log_a x$ มีลักษณะดังรูปที่ 7



รูปที่ 7

ข้อสังเกต 1. กราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะผ่านจุด $(1, 0)$ เสมอ เนื่องจาก $\log_a 1 = 0$

2. ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

3. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$

4. จากสมบัติของฟังก์ชัน $1-1$
จะได้ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

5. เนื่องจาก $y = \log_a x$ ก็ต่อเมื่อ $a^y = x$
เมื่อแทน y ในสมการหลังด้วย $\log_a x$ จะได้ $a^{\log_a x} = x$
และเมื่อแทน x ในสมการแรกด้วย a^y จะได้ $y = \log_a a^y$
ดังนั้น $a^{\log_a x} = x$ และ $y = \log_a a^y$

ตัวอย่างที่ 31

จงหาค่าของ

1) $\log_5 625$ 2) $\log_8 4$ 3) $\log_{\frac{1}{27}} 81$

วิธีทำ 1) ให้ $y = \log_5 625$

จะได้ $5^y = 625$

$5^y = 5^4$

ดังนั้น $y = 4$

นั่นคือ $\log_5 625 = 4$

2) ให้ $y = \log_8 4$

จะได้ $8^y = 4$

$(2^3)^y = 2^2$

$2^{3y} = 2^2$

ดังนั้น $3y = 2$

$y = \frac{2}{3}$

นั่นคือ $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

3) ให้ $y = \log_{\frac{1}{27}} 81$

จะได้ $\left(\frac{1}{27}\right)^y = 81$

$(3^{-3})^y = 3^4$

$3^{-3y} = 3^4$

ดังนั้น $-3y = 4$

$y = -\frac{4}{3}$

นั่นคือ $\log_{\frac{1}{27}} 81 = -\frac{4}{3}$

สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึมมีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^k = k \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$
7. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

สมบัติข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้สมบัติของเลขยกกำลัง เช่น

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

พิสูจน์ ให้ $\alpha = \log_a M$ และ $\beta = \log_a N$

จะได้ $a^\alpha = M$ และ $a^\beta = N$

ดังนั้น $MN = a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

$\log_a MN = \alpha + \beta$

นั่นคือ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

3. $\log_a M^k = k \log_a M$

พิสูจน์ ให้ $\alpha = \log_a M$

จะได้ $a^\alpha = M$

ดังนั้น $M^k = \left(a^\alpha\right)^k = a^{\alpha k}$

นั่นคือ $\log_a M^k = \alpha k = k \log_a M$

สมบัติข้อใดที่ไม่ได้พิสูจน์ ให้นักเรียนลองพิสูจน์เอง สมบัติเหล่านี้นำไปใช้ในการหาค่าของฟังก์ชันลอการิทึมของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 32

จงหาค่าของ

1) $\log_5 125$

2) $\log_2 \frac{1}{128}$

3) $\log_3 3\sqrt{3}$

วิธีทำ 1) $\log_5 125 = \log_5 5^3$

$= 3\log_5 5$

$= 3$

$$
\begin{aligned}
2)\quad \log_2 \frac{1}{128} &= \log_2 \frac{1}{2^7} \\
&= \log_2 2^{-7} \\
&= -7\log_2 2 \\
&= -7 \\
3)\quad \log_3 3\sqrt{3} &= \log_3 3^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{3}{2}\log_3 3 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 33

จงหาค่าของ

1) $\log_4 2 + \log_4 32$

2) $\log_2 80 - \log_2 5$

วิธีทำ 1) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \times 32)$

$$
\begin{aligned}
&= \log_4 4^3 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

2) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \left(\frac{80}{5}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= \log_2 16 \\
&= \log_2 2^4 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 34

จงหาค่าประมาณของ $\log_9 7$ เมื่อ $\log_3 7 \approx 1.771$

วิธีทำ จาก $\log_9 7 = \log_{3^2} 7$

$$= \frac{1}{2}\log_3 7$$

$$\approx \frac{1}{2}(1.771)$$

และ $\frac{1}{2}(1.771) = 0.8855$

ดังนั้น $\log_9 7 \approx 0.8855$

ตัวอย่างที่ 35

จงหาค่าประมาณของ $\log_{10} 3.2$ เมื่อ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$

วิธีทำ จาก $\log_{10} 3.2 = \log_{10}\left(\frac{32}{10}\right)$

$$= \log_{10} 32 - \log_{10} 10$$

$$= \log_{10} 2^5 - 1$$

$$= 5\log_{10} 2 - 1$$

$$\approx 5(0.3010) - 1$$

และ $5(0.3010) - 1 = 1.5050 - 1$

$$= 0.5050$$

ดังนั้น $\log_{10} 3.2 \approx 0.5050$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปลอการิทึม

   1) $4^2 = 16$

   2) $27^{\frac{2}{3}} = 9$

   3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

   4) $10^{-4} = 0.0001$

   5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

   6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$

   7) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-2} = 10000$

   8) $4^{-\frac{3}{2}} = 0.125$

2. จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปเลขยกกำลัง

   1) $\log_{10} 100 = 2$

   2) $\log_2 32 = 5$

   3) $\log_5 1 = 0$

   4) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right) = -3$

   5) $\log_{10} 0.001 = -3$

   6) $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$

3. จงหาค่าของ

1) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

3) $\log_{10} 100$

4) $\log_{10} 0.1$

5) $\log_{\sqrt{3}} 3^{12}$

6) $\log_{\frac{1}{4}} 16$

7) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

8) $\log_2 112 - \log_2 7$

4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2) $y = \log_3 x$

3) $y = \log_4 x$

4) $y = 2 + \log_3 x$

5) $y = \log_3 (x-2)$

6) $y = \log_3 (x-1) - 2$

5. จงหาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\log_2 x = 5$

2) $\log_{10} x = 2$

3) $\log_x 1000 = 3$

4) $\log_x 16 = 4$

5) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$

6. กำหนดให้ $\log_5 3 \approx 0.6826$ จงหาค่าประมาณของ $\log_5 45$ และ $\log_{25} 15$

2.4 การหาค่าลอการิทึม

ลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณคือ **ลอการิทึมสามัญ (common logarithm)** ซึ่งหมายถึงลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10 ในการเขียนลอการิทึมสามัญนิยมเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ เช่น $\log_{10} 3$ จะเขียนแทนด้วย $\log 3$ และ $\log_{10} N$ จะเขียนแทนด้วย $\log N$ ในการคำนวณค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบางจำนวนอาจหาได้จากค่าลอการิทึมที่ทราบ

พิจารณาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบวกที่สามารถเขียนอยู่ในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม โดยอาศัยสมบัติของลอการิทึมดังนี้

$$\begin{aligned}
\log 1000 &= \log 10^3 = 3\log 10 = 3 \\
\log 100 &= \log 10^2 = 2\log 10 = 2 \\
\log 10 &= 1 \\
\log 1 &= 0 \\
\log 0.1 &= \log 10^{-1} = (-1)\log 10 = -1 \\
\log 0.01 &= \log 10^{-2} = (-2)\log 10 = -2 \\
\log 0.001 &= \log 10^{-3} = (-3)\log 10 = -3 \\
\log 10^n &= n\log 10 = n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}
\end{aligned}$$

เนื่องจากจำนวนจริงบวก N ใด ๆ สามารถเขียนในรูป $N_0 \times 10^n$ เมื่อ $1 \le N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม ได้เสมอ เช่น

$$\begin{aligned}
1200 &= 1.2 \times 10^3 \\
0.035 &= 3.5 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

การเขียน N ในรูปนี้สามารถนำมาช่วยในการหาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบางจำนวนได้จากค่าลอการิทึมที่ทราบ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 36

จงหาค่าของ $\log 5760$ และ $\log 0.576$ เมื่อ $\log 5.76 \approx 0.7604$

วิธีทำ จาก $\log 5760 = \log\left(5.76 \times 10^{3}\right)$

$= \log 5.76 + \log 10^{3}$

$\approx 0.7604 + 3$

และ $0.7604 + 3 = 3.7604$

ดังนั้น $\log 5760 \approx 3.7604$

จาก $\log 0.576 = \log\left(5.76 \times 10^{-1}\right)$

$= \log 5.76 + \log 10^{-1}$

$\approx 0.7604 + (-1)$

และ $0.7604 + (-1) = -0.2396$

ดังนั้น $\log 0.576 \approx -0.2396$ ■

ตัวอย่างข้างต้นแสดงการหาค่าของ $\log N$ เมื่อกำหนดค่า N ในทางตรงกันข้าม ถ้ากำหนดค่า $\log N$ ก็สามารถหา N ได้ และเรียก N ว่า **แอนติลอการิทึม (antilogarithm)** ของ $\log N$

บทนิยาม 9

A เป็นแอนติลอการิทึมของ B ก็ต่อเมื่อ $B = \log A$

ตัวอย่างที่ 37

กำหนดให้ $\log 5.71 \approx 0.7566$ และ $\log N = 3.7566$ จงหาค่าของ N

วิธีทำ จาก $\log N = 3.7566$

$= 0.7566 + 3$

และ $\log 5.71 \approx 0.7566$

จะได้ $\log N \approx \log 5.71 + 3\log 10$

และ $\log 5.71 + 3\log 10 = \log 5.71 + \log 10^3$

$= \log\left(5.71 \times 10^3\right)$

$= \log(5710)$

จะได้ $\log N \approx \log(5710)$

ดังนั้น $N \approx 5710$ ■

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น 5710 เป็นแอนติลอการิทึมของ 3.7566

แบบฝึกหัด 2.4

1. กำหนดให้ $\log 3.71 \approx 0.5694$ และ $\log 8.32 \approx 0.9201$ จงหาค่าของ
   1) $\log 37100$
   2) $\log 0.00371$
   3) $\log 832$
   4) $\log 0.0832$

2. กำหนดให้ $\log 2.56 \approx 0.4082$ จงหา N เมื่อ
   1) $\log N = 0.4082$
   2) $\log N = 3.4082$
   3) $\log N = -0.5918$

2.5 การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม

การเปลี่ยนฐานของลอการิทึมจากฐานหนึ่งไปยังอีกฐานหนึ่ง เช่น ต้องการเปลี่ยน $\log_b x$ ให้อยู่ในรูป $\log_a x$ ทำได้ดังนี้

ให้ $y = \log_b x$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

จะได้ว่า $x = b^y$

ดังนั้น $\log_a x = \log_a b^y$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

$= y \log_a b$

จะได้ $y = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

นั่นคือ $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

ตัวอย่างที่ 38

กำหนดให้ $\log 2.17 \approx 0.3365$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาค่าของ $\log_3 2.17$

วิธีทำ $\log_3 2.17 = \dfrac{\log 2.17}{\log 3}$

$\approx \dfrac{0.3365}{0.4771}$

≈ 0.7053

ดังนั้น $\log_3 2.17$ มีค่าประมาณ 0.7053 ■

ตัวอย่างที่ 39

กำหนดให้ $\log_3 7 \approx 1.771$ จงหาค่าของ $\log_9 7$

วิธีทำ
$$\log_9 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 9}$$
$$= \frac{\log_3 7}{\log_3 3^2}$$
$$\approx \frac{1.771}{2}$$

และ $\frac{1.771}{2} = 0.8855$

ดังนั้น $\log_9 7$ มีค่าประมาณ 0.8855 ■

ลอการิทึมอีกฐานหนึ่งที่ใช้มากและมีประโยชน์ในการศึกษาขั้นสูงต่อไปคือ ลอการิทึมฐาน e เมื่อ e เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนอตรรกยะจำนวนหนึ่งซึ่งมีค่าประมาณ 2.7182818284 เรียกลอการิทึมฐาน e ว่า **ลอการิทึมแบบเนเปียร์ (Napierian logarithm)** หรือ **ลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm)** ในการเขียนลอการิทึมของ x ฐาน e นิยมเขียน $\ln x$ แทน $\log_e x$ และอาจหาค่าลอการิทึมฐาน e โดยอาศัยลอการิทึมฐานสิบได้ดังนี้

$$\log_e x = \frac{\log x}{\log e}$$

หรือ $$\ln x = \frac{\log x}{\log e}$$

แต่ $$\log e \approx \log 2.71828 \quad \text{เมื่อ } e \approx 2.71828$$
$$\approx 0.4343$$

ดังนั้น $$\ln x \approx \frac{\log x}{0.4343}$$

หรือ $$\ln x \approx (2.3026)\log x$$

ข้อสังเกต $\ln e = 1$

ตัวอย่างที่ 40

กำหนด $\log e \approx 0.4343$, $\log 7.2 \approx 0.8573$ และ $\log 3.24 \approx 0.5105$
จงหาค่าของ $\ln 72$ และ $\ln 0.324$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\ln 72 &= \frac{\log 72}{\log e} \\
&= \frac{\log 7.2 + \log 10}{\log e} \\
&\approx \frac{0.8573 + 1}{0.4343} \\
&\approx 4.2765
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln 0.324 &= \frac{\log 0.324}{\log e} \\
&= \frac{\log 3.24 - \log 10}{\log e} \\
&\approx \frac{0.5105 - 1}{0.4343} \\
&\approx -1.1271
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.5

1. กำหนด $\log_6 5 \approx 0.8982$ จงหาค่าของ $\log_{36} 5$

2. กำหนด $\log_4 46 \approx 2.7618$ จงหาค่าของ $\log_{64} 46$

3. กำหนด $\log e \approx 0.4343$, $\log 4.23 \approx 0.6263$ และ $\log 1.63 \approx 0.2122$ จงหาค่าของ $\ln 423$ และ $\ln 0.163$

4. จงหาค่าประมาณของ
   1) $\log_3 16$
   2) $\log_4 125$
   3) $\log_7 2.61$
   4) $\ln 728$
   5) $\ln 114$
   6) $\ln 99$
   7) $\ln 107$
   8) $\ln 0.0124$

2.6 สมการและอสมการลอการิทึม

สมการลอการิทึม (logarithmic equation) เป็นสมการที่มีลอการิทึมของตัวแปร ในทำนองเดียวกัน **อสมการลอการิทึม (logarithmic inequality)** เป็นอสมการที่มีลอการิทึมของตัวแปร การแก้สมการและอสมการอาจทำได้โดยอาศัยสมบัติต่าง ๆ ของลอการิทึม ข้อควรระวังคือตัวแปรที่อยู่ภายใต้ลอการิทึมจะต้องมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 41

กำหนด $\log x = 2\log 4 + \log 32$ จงหาค่าของ x

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\log x &= 2\log 4 + \log 32\\ &= \log 4^2 + \log 32\\ &= \log\left(4^2 \times 32\right)\\ &= \log 512\end{aligned}$$

เนื่องจากฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน $1-1$

ดังนั้น $x = 512$ ■

ตัวอย่างที่ 42

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log(3x+2) = \log(x-1)+1$

วิธีทำ จาก $\log(3x+2) = \log(x-1)+1$

จะได้ $\log(3x+2)-\log(x-1) = 1$

$$\log\left(\frac{3x+2}{x-1}\right) = 1$$

จะได้ $$\frac{3x+2}{x-1} = 10$$

$$3x+2 = 10x-10$$

$$7x = 12$$

ดังนั้น $$x = \frac{12}{7}$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย $\frac{12}{7}$ ใน $\log(3x+2)$

จะได้ $\log\left(3\left(\frac{12}{7}\right)+2\right) = \log\left(\frac{50}{7}\right)$

แทน x ด้วย $\frac{12}{7}$ ใน $\log(x-1)+1$

จะได้ $\log\left(\frac{12}{7}-1\right)+1 = \log\left(\frac{5}{7}\right)+\log 10 = \log\left(\frac{50}{7}\right)$

แสดงว่า $\frac{12}{7}$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{12}{7}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 43

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

วิธีทำ จาก $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

จะได้ $\log[(x+2)(x-1)] = 1$

$$(x+2)(x-1) = 10$$

$$x^2 + x - 2 = 10$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x = -4 \text{ หรือ } x = 3$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าค่าใดสอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

กรณี $x = -4$

แทน x ด้วย -4 ใน $\log(x+2) + \log(x-1)$

จะได้ $\log(-4+2) + \log(-4-1) = \log(-2) + \log(-5)$

เนื่องจากไม่นิยาม $y = \log_a x$ เมื่อ x ไม่เป็นจำนวนจริงบวก

แสดงว่า -4 ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

กรณี $x = 3$

แทน x ด้วย 3 ใน $\log(x+2) + \log(x-1)$

จะได้ $\log(3+2) + \log(3-1) = \log 5 + \log 2$

$$= \log(5 \times 2)$$

$$= \log 10$$

$$= 1$$

แสดงว่า 3 สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{3\}$ ■

ตัวอย่างที่ 44

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log(x+1) < 2\log 3 + \log 7$

วิธีทำ จาก $\log(x+1) < 2\log 3 + \log 7$

จะได้ $\log(x+1) < \log 3^2 + \log 7$

$\log(x+1) < \log\left(3^2 \times 7\right)$

$\log(x+1) < \log 63$

เนื่องจากฟังก์ชันลอการิทึมฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และโดเมนของฟังก์ชันลอการิทึมเป็นเซตของจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$$0 < x+1 < 63$$

$$-1 < x < 62$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $(-1, 62)$ ■

ในการหาคำตอบของสมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล อาจทำได้โดยอาศัยลอการิทึม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 45

จงหาค่าของ x จากสมการ $3^x = 30$ กำหนดให้ $\log 3 \approx 0.4771$

วิธีทำ จาก $3^x = 30$

จะได้ $\log 3^x = \log 30$

$x\log 3 = \log 30$

$$x = \frac{\log 30}{\log 3}$$

$$x = \frac{1+\log 3}{\log 3}$$

$$x \approx \frac{1.4771}{0.4771}$$

ดังนั้น $x \approx 3.0960$ ■

ตัวอย่างที่ 46

จงหาค่าของ x จากสมการ $3^{x+1} = 4^{x-7}$ กำหนดให้ $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$

วิธีทำ จาก $3^{x+1} = 4^{x-7}$

จะได้ $\log 3^{x+1} = \log 4^{x-7}$

$$(x+1)\log 3 = (x-7)\log 4$$

$$x\log 3 + \log 3 = x\log 4 - 7\log 4$$

$$x(\log 4 - \log 3) = \log 3 + 7\log 4$$

$$x = \frac{\log 3 + 7\log 4}{\log 4 - \log 3}$$

$$x = \frac{\log 3 + 14\log 2}{2\log 2 - \log 3}$$

$$x \approx \frac{0.4771 + 4.2140}{0.6020 - 0.4771}$$

$$x \approx \frac{4.6911}{0.1249}$$

ดังนั้น $x \approx 37.5588$ ■

ตัวอย่างที่ 47

จงหาค่าของ x จากสมการ $e^{2x}-e^{x}-6=0$ กำหนดให้ $\ln 3 \approx 1.0986$

วิธีทำ จาก $e^{2x}-e^{x}-6 = 0$

จะได้ $\left(e^{x}\right)^{2}-e^{x}-6 = 0$

$\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}+2\right) = 0$

ดังนั้น $e^{x} = 3$ หรือ $e^{x} = -2$

กรณี $e^{x} = 3$

จะได้ $x = \ln 3 \approx 1.0986$

กรณี $e^{x} = -2$ ไม่มีคำตอบ เพราะว่า $e^{x} > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ดังนั้น $x \approx 1.0986$ ■

ตัวอย่างที่ 48

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $9^{x}-3^{x}<20$

วิธีทำ จาก $9^{x}-3^{x} < 20$

จะได้ $9^{x}-3^{x}-20 < 0$

$\left(3^{x}\right)^{2}-3^{x}-20 < 0$

$\left(3^{x}-5\right)\left(3^{x}+4\right) < 0$

เนื่องจาก $3^{x}+4>0$ เสมอ

ดังนั้น $3^{x}-5 < 0$

นั่นคือ $3^{x} < 5$

เนื่องจากฟังก์ชันลอการิทึมฐาน 3 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า

$\log_{3} 3^{x} < \log_{3} 5$

$x < \log_{3} 5$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, \log_{3} 5)$ ■

เสริมสมอง : Gateway Arch

Gateway Arch เป็นจุดชมวิว สูง 630 ฟุต ตั้งอยู่ที่เมืองเซนต์หลุยส์ รัฐมิสซูรี สหรัฐอเมริกา สร้างเสร็จใน ค.ศ. 1965 ออกแบบเป็นลักษณะโค้งโดยใช้ฟังก์ชันที่ประกอบขึ้นจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และมีสมการอยู่ในรูป

$$y = A - A\left(\frac{e^{x/B} + e^{-x/B}}{2}\right)$$ เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัว

ลักษณะโค้งแบบนี้ทำให้สามารถลดความหนาของสิ่งก่อสร้างได้ แต่ยังมีความมั่นคงและแข็งแรง

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้
   1) $\ln x = 10$
   2) $\log x = -2$
   3) $\log 2x = 3$
   4) $\log(3x+5) = 2$
   5) $\log 2x = \log 2 + 5$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้
   1) $\log(3x+5)+3 = \log(2x+1)$
   2) $\log(x+2)-\log(x+1) = 3$
   3) $\log x = 1-\log(x-9)$
   4) $\log_2 3+\log_2 x = \log_2 5+\log_2(x-2)$
   5) $\log_5(x+1)-\log_5(x-1) = 2$
   6) $\log_9(x-5)+\log_9(x+3) = 1$
   7) $\log_2(\log_3 x) = 4$
   8) $2^{\frac{2}{\log_5 x}} = \frac{1}{16}$

3. จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้
   1) $3^x = 36$
   2) $9^x = 3^{2x}$
   3) $5^x = 4^{x+1}$
   4) $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

4. จงแก้สมการต่อไปนี้
   1) $4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = 0$
   2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
   3) $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

5. กำหนด $\log 2 \approx 0.3010$ และ $\log 3 \approx 0.4771$ จงหาค่าของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้
   1) $12^{2-5x}\,8^{x+3} = 16$
   2) $2^{2x+1}\,3^{2x+2} = 5^{4x}$
   3) $\dfrac{5^{2x}}{2^{x-4}} = 3^{3x-7}$

6. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้
   1) $5^x \geq 27$
   2) $e^{4x} - e^{2x} > 110$
   3) $\log x > -3.5$
   4) $\log(7x+1) \leq 4.5$
   5) $\log_{0.5}(x+2) - \log_{0.5}(x+1) < 2$

2.7 การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ในหัวข้อนี้เป็นการนำความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมไปแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังนี้

การเพิ่มจำนวนประชากร

การเพิ่มจำนวนประชากรในกรณีที่การเพิ่มไม่ได้เป็นไปอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา สามารถคาดการณ์จำนวนประชากร ณ เวลาใดเวลาหนึ่งได้จาก

$$n(t) = n_0(1+r)^t$$

เมื่อ $n(t)$ แทน จำนวนประชากรเมื่อเวลาผ่านไป t ปี
n_0 แทน จำนวนประชากรเมื่อเวลาเริ่มต้น
r แทน อัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรต่อเวลา

ตัวอย่างที่ 49

ฟาร์มเลี้ยงกระต่ายแห่งหนึ่งมีอัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนกระต่าย 55% ต่อปี โดยในปัจจุบันฟาร์มแห่งนี้เลี้ยงกระต่ายมาได้ 8 ปี และมีกระต่ายทั้งหมด 4,100 ตัว

1) เมื่อเวลาเริ่มต้น ฟาร์มแห่งนี้มีกระต่ายประมาณกี่ตัว
2) อีก 12 ปีข้างหน้า ฟาร์มแห่งนี้จะมีกระต่ายประมาณกี่ตัว

วิธีทำ 1) จาก $n(t) = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $t = 8,\ r = \frac{55}{100} = 0.55$ และ $n(8) = 4,100$

จะได้ $4,100 = n_0(1+0.55)^8$

$$n_0 = \frac{4100}{(1.55)^8}$$

$$\approx 123$$

ดังนั้น เมื่อเวลาเริ่มต้น ฟาร์มแห่งนี้มีกระต่ายประมาณ 123 ตัว

2) ในที่นี้ $n_0 = \dfrac{4,100}{(1.55)^8}$ และ $t = 20$

จะได้ $$\begin{aligned} n(20) &= \frac{4,100}{(1.55)^8}(1+0.55)^{20} \\ &= 4,100(1.55)^{12} \\ &\approx 788,432 \end{aligned}$$

ดังนั้น อีก 12 ปีข้างหน้า ฟาร์มแห่งนี้จะมีกระต่ายประมาณ 788,432 ตัว ■

ตัวอย่างที่ 50

เมื่อ พ.ศ. 2559 พบว่า โลกมีประชากรทั้งหมด 7.4 พันล้านคน ถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรโลกเป็น 1.13% ต่อปี แล้วโลกจะมีจำนวนประชากรประมาณหนึ่งหมื่นล้านคนใน พ.ศ. ใด

วิธีทำ จาก $n(t) = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $n_0 = 7.4$, $r = \dfrac{1.13}{100} = 0.0113$ และ $n(t) = 10$

จะได้ $$\begin{aligned} 10 &= 7.4(1+0.0113)^t \\ \frac{10}{7.4} &= (1.0113)^t \\ \log 10 - \log 7.4 &= t \log 1.0113 \\ t &= \frac{1-\log 7.4}{\log 1.0113} \\ &\approx 26.80 \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรโลกเป็น 1.13% ต่อปี โลกจะมีจำนวนประชากรหนึ่งหมื่นล้านคน นับจาก พ.ศ. 2559 ไปอีกประมาณ 27 ปี หรือประมาณ พ.ศ. 2586 ■

ดอกเบี้ยทบต้น

การฝากเงินที่มีการคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทุกสิ้นปี สามารถคำนวณ ได้ดังนี้

$$B(n) = B_0(1+r)^n$$

เมื่อ $B(n)$ แทน จำนวนเงินฝากในบัญชี เมื่อสิ้นสุดปีที่ n

B_0 แทน จำนวนเงินฝากเริ่มต้น

r แทน อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อปี

ตัวอย่างที่ 51

ธนาคารแห่งหนึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 0.5 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยเป็นรายปี

1) ถ้าฝากเงิน 30,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน จงหาจำนวนเงินฝากในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 5
2) ถ้าต้องการให้มีเงินในบัญชีหลังสิ้นสุดปีที่ 10 เป็นจำนวนเงิน 100,000 บาท ต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด โดยคำตอบอยู่ในรูปจำนวนเต็ม
3) ถ้าฝากเงิน 20,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน ต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ปีจึงจะทำให้มีเงินในบัญชี 30,000 บาท

วิธีทำ 1) จาก $B(n) = B_0(1+r)^n$

ในที่นี้ $n = 5,\ r = \frac{0.5}{100} = 0.005$ และ $B_0 = 30,000$

จะได้ $B(5) = 30,000(1+0.005)^5$

$\approx 30,757.54$

ดังนั้น ถ้าฝากเงิน 30,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน เมื่อสิ้นปีที่ 5 จะมีเงินฝากในบัญชีประมาณ 30,757.54 บาท

2) จาก $B(n) = B_0(1+r)^n$

ในที่นี้ $n = 10,\ r = \frac{0.5}{100} = 0.005$ และ $B(10) = 100,000$

จะได้ $100,000 = B_0(1+0.005)^{10}$

$$B_0 = \frac{100,000}{(1.005)^{10}}$$

$$\approx 95,134.79$$

ดังนั้น ถ้าต้องการให้มีเงินในบัญชีหลังสิ้นสุดปีที่ 10 เป็นจำนวนเงิน 100,000 บาท ต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 95,135 บาท

3) จาก $B(n) = B_0(1+r)^n$

ในที่นี้ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005,\ B_0 = 20,000$ และ $B(n) = 30,000$

จะได้ $30,000 = 20,000(1+0.005)^n$

$$1.5 = (1.005)^n$$

$$\log 1.5 = n \log 1.005$$

$$n = \frac{\log 1.5}{\log 1.005}$$

$$\approx 81.3$$

ดังนั้น ถ้าฝากเงิน 20,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน ต้องใช้เวลาประมาณ 81.3 ปี จึงจะทำให้มีเงินในบัญชี 30,000 บาท แต่เนื่องจากคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกสิ้นปี จึงต้องรอจนถึงสิ้นปีที่ 82 ■

เสริมสมอง : ดอกเบี้ยทบต้น

ในความเป็นจริงแล้ว การคิดดอกเบี้ย อาจคิดเป็นราย 6 เดือน ราย 3 เดือน หรือรายวัน ซึ่งในกรณีที่การคิดดอกเบี้ยมีมากกว่าหนึ่งครั้งต่อปี จะคำนวณได้ดังนี้

$$B(n) = B_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$$

เมื่อ $B(n)$ แทนจำนวนเงินฝากในบัญชี เมื่อสิ้นสุดปีที่ n
B_0 แทนจำนวนเงินฝากเริ่มต้น
r แทนอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อปี
m แทนจำนวนครั้งที่คิดดอกเบี้ยต่อปี

เช่น หากคิดดอกเบี้ยทุก 6 เดือน จะได้ $m = 2$
หากคิดดอกเบี้ยทุก 3 เดือน จะได้ $m = 4$
และหากคิดดอกเบี้ยทุกวัน จะได้ $m = 365$

อัตราเงินเฟ้อ

ในทางเศรษฐศาสตร์ ภาวะเงินเฟ้อ (inflation) หมายถึง ภาวะที่ราคาสินค้าและบริการโดยทั่วไปเพิ่มขึ้น และทำให้มูลค่าที่แท้จริงของเงินลดลง เช่น เมื่อ 20 ปีที่แล้ว ข้าวแกงราคาจานละ 10 บาท อีก 10 ปีต่อมา ราคาขึ้นเป็น 20 บาท ปัจจุบันราคาขึ้นเป็น 40 บาท จากเดิมเงิน 100 บาท สามารถซื้อข้าวแกงได้ 10 จาน แต่ 10 ปีต่อมา สามารถซื้อได้เพียง 5 จาน ผ่านไปอีก 10 ปี สามารถซื้อได้เพียง 2.5 จาน จะเห็นว่ามูลค่าที่แท้จริงของเงิน 100 บาท ลดลง แสดงว่าเกิดภาวะเงินเฟ้อ เรียกอัตราการลดลงของค่าเงินว่า อัตราเงินเฟ้อ

ถ้าสมมติว่าอัตราเงินเฟ้อมีค่าคงตัว มูลค่าของเงิน ณ เวลา t ใด ๆ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$V(t) = V_0e^{-rt}$$

เมื่อ $V(t)$ แทน มูลค่าของเงิน ณ เวลา t
V_0 แทน มูลค่าของเงิน ณ เวลาเริ่มต้น
r แทน อัตราเงินเฟ้อต่อปี

ตัวอย่างที่ 52

กำหนดให้ อัตราเงินเฟ้อเป็นค่าคงตัวและเท่ากับ 2.65% ต่อปี จงหาว่าเงิน 100,000 บาท ที่มีในปัจจุบัน จะมีมูลค่าของเงินประมาณเท่าใดในอีก 10 ปีข้างหน้า

วิธีทำ จาก $V(t) = V_0 e^{-rt}$

ในที่นี้ $V_0 = 100{,}000$, $r = \frac{2.65}{100} = 0.0265$ และ $t = 10$

จะได้ $V(10) = 100{,}000e^{-0.0265\times 10}$

$\approx 76{,}720.59$

ดังนั้น เงิน 100,000 บาท ที่มีในปัจจุบัน จะมีมูลค่าของเงินประมาณ 76,720.59 บาท ในอีก 10 ปีข้างหน้า ■

การเพิ่มจำนวนแบคทีเรีย

การเพิ่มขึ้นของจำนวนแบคทีเรียซึ่งเป็นไปอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

เมื่อ $n(t)$ แทน จำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง

n_0 แทน จำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาเริ่มต้น

r แทน อัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนแบคทีเรียต่อเวลา

ตัวอย่างที่ 53

นักชีววิทยาได้ทำการเพาะแบคทีเรียชนิดหนึ่ง พบว่ามีอัตราการเพิ่มขึ้นเท่ากับ 40% ต่อชั่วโมง จงหาว่า เมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียประมาณกี่เซลล์ ถ้ามีจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาเริ่มต้น 500 เซลล์

วิธีทำ จาก $n(t) = n_0 e^{rt}$

ในที่นี้ $n_0 = 500$, $r = \frac{40}{100} = 0.4$ และ $t = 10$

ดังนั้น $n(10) = 500e^{0.4\times 10}$

$= 500e^4$

$\approx 500 \times 54.59815$

$\approx 27,299$

เมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียประมาณ 27,299 เซลล์ ■

ปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่กำลังสลายตัว

การสลายตัวของสารกัมมันตรังสีที่มีครึ่งชีวิต (half – life) h วัน มีสูตรการหาปริมาณสารที่เหลืออยู่ ดังนี้

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

เมื่อ $m(t)$ แทน ปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่ เมื่อเวลาผ่านไป t วัน

m_0 แทน ปริมาณของสารกัมมันตรังสี ณ จุดเริ่มต้น

$r = \frac{\ln 2}{h}$

ตัวอย่างที่ 54

พอโลเนียม–210 มีครึ่งชีวิต 140 วัน ถ้าเดิมมีปริมาณของพอโลเนียม–210 อยู่ 300 มิลลิกรัม จงหา
1) ปริมาณของพอโลเนียม–210 ที่เหลืออยู่ เมื่อเวลาผ่านไป 1 ปี
2) ใช้เวลานานกี่วัน จึงจะมีพอโลเนียม–210 เหลืออยู่ 200 มิลลิกรัม
3) ใช้เวลาอย่างน้อยกี่วัน จึงจะมีพอโลเนียม–210 เหลืออยู่น้อยกว่า 50 มิลลิกรัม

วิธีทำ 1) จาก $m(t) = m_0 e^{-rt}$

ในที่นี้ $m_0 = 300$, $t = 365$ และ $r = \frac{\ln 2}{140}$

จะได้ $m(365) = 300\, e^{-\left(\frac{\ln 2}{140}\right)365}$

≈ 49.24

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 1 ปี มีพอโลเนียม–210 เหลืออยู่ประมาณ 49.24 มิลลิกรัม

2) จาก $m(t) = m_0 e^{-rt}$

ในที่นี้ $m(t) = 200$

จะได้ $200 = 300\, e^{-\left(\frac{\ln 2}{140}\right)t}$

$$\frac{2}{3} = e^{-\left(\frac{\ln 2}{140}\right)t}$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{\ln 2}{140}\right)t$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{\ln 2}{140}\right)} \approx 82$$

ดังนั้น พอโลเนียม–210 จะเหลือ 200 มิลลิกรัม เมื่อเวลาผ่านไปประมาณ 82 วัน

3) จาก $m(t) = m_0 e^{-rt}$

ในที่นี้ $m(t) < 50$

จะได้ $300\, e^{-\left(\frac{\ln 2}{140}\right)t} < 50$

$$e^{-\left(\frac{\ln 2}{140}\right)t} < \frac{1}{6}$$

เนื่องจากฟังก์ชันลอการิทึมฐาน e เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า

$$-\left(\frac{\ln 2}{140}\right)t < \ln\frac{1}{6}$$

จะได้ $$t > -\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{\ln 2}{140}\right)} \approx 362$$

ดังนั้น ใช้เวลาอย่างน้อย 362 วัน จึงจะมีพอโลเนียม -210 เหลืออยู่น้อยกว่า 50 มิลลิกรัม ■

ระดับเสียง

ระดับเสียง (sound level) เป็นการเปรียบเทียบความเข้มเสียงนั้นกับความเข้มเสียงเบาที่สุดที่มนุษย์ได้ยิน เนื่องจากความเข้มเสียงที่มนุษย์ได้ยินอยู่ในช่วง 10^{-12} วัตต์ต่อตารางเมตร ถึง 1 วัตต์ต่อตารางเมตร ซึ่งเป็นช่วงที่กว้างมาก ดังนั้น เพื่อความสะดวกในการจัดลำดับความเข้มเสียง จึงนิยมใช้ระดับเสียงเป็นตัวบอกความดังของเสียงแทนความเข้มของเสียง ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\beta = 10 \log\frac{I}{I_0}$$

เมื่อ β แทน ระดับเสียงมีหน่วยเป็นเดซิเบล

I แทน ความเข้มเสียงที่ต้องการวัดมีหน่วยเป็นวัตต์ต่อตารางเมตร

I_0 แทน ความเข้มเสียงที่หูคนปกติเริ่มได้ยิน ซึ่งเท่ากับ 10^{-12} วัตต์ต่อตารางเมตร

ตัวอย่างที่ 55

เครื่องบินไอพ่นขณะกำลังบินขึ้นสู่ท้องฟ้ามีความเข้มเสียง 100 วัตต์ต่อตารางเมตร จงหาระดับเสียงของเครื่องบินไอพ่น

วิธีทำ จาก $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$

ในที่นี้ $I = 100$

จะได้ $\beta = 10\log\frac{100}{10^{-12}}$

$= 10\log 10^{14}$

$= 140$

ดังนั้น ระดับเสียงของเครื่องบินไอพ่นเท่ากับ 140 เดซิเบล ■

ระดับความเป็นกรด-เบส

ระดับความเป็นกรด-เบส (pH) ของสารละลายสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\text{pH} = -\log\left[\text{H}_3\text{O}^+\right]$$

เมื่อ pH แทน ระดับความเป็นกรด-เบสของสารละลาย

$\left[\text{H}_3\text{O}^+\right]$ แทน ความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนมีหน่วยเป็นโมลต่อลิตร

โดยสารละลายที่มี

ค่า pH เท่ากับ 7 เป็นสารละลายที่มีสมบัติเป็นกลาง

ค่า pH น้อยกว่า 7 เป็นสารละลายที่มีสมบัติเป็นกรด

ค่า pH มากกว่า 7 เป็นสารละลายที่มีสมบัติเป็นเบส

ตัวอย่างที่ 56

ตัวอย่างเลือดของชายคนหนึ่งมีความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน เท่ากับ 3.16×10^{-8} โมลต่อลิตร จงหาค่า pH พร้อมทั้งระบุความเป็นกรด-เบสของตัวอย่างเลือดนี้

วิธีทำ จาก $\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right]$

ในที่นี้ $\left[H_3O^+\right] = 3.16\times10^{-8}$

จะได้ $\text{pH} = -\log\left(3.16\times10^{-8}\right)$

$= -\log 3.16 + 8$

≈ 7.5

เนื่องจาก pH มากกว่า 7 ดังนั้น ตัวอย่างเลือดมีสมบัติเป็นเบส ■

แบบฝึกหัด 2.7

1. ใน พ.ศ. 2559 จังหวัดหนึ่งมีประชากร 112,000 คน และมีอัตราการเพิ่มของประชากร 4% ต่อปี
   1) ใน พ.ศ. 2569 จังหวัดนี้จะมีจำนวนประชากรประมาณเท่าใด
   2) จังหวัดนี้จะมีจำนวนประชากร 200,000 คน ใน พ.ศ. ใด

2. ธนาคารแห่งหนึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 0.75 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยเป็นรายปี
   1) ถ้าฝากเงิน 50,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน จงหาจำนวนเงินฝากในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 10
   2) ถ้าต้องการให้มีเงินในบัญชีหลังสิ้นปีที่ 15 เป็นจำนวนเงิน 150,000 บาท ต้องฝากเงินต้นไว้จำนวนเท่าใด
   3) ถ้าฝากเงิน 100,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน ต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ปีจึงจะทำให้มีเงินในบัญชี 200,000 บาท

3. กำหนดให้ อัตราเงินเฟ้อเป็นค่าคงตัวและเท่ากับ 4% ต่อปี จงหาว่าเงิน 20,000 บาท ที่มีในปัจจุบัน จะมีมูลค่าของเงินประมาณเท่าใดในอีก 5 ปีข้างหน้า

4. นักชีววิทยาได้ทำการเพาะเชื้อแบคทีเรียที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวนหนึ่ง พบว่ามีอัตราการเพิ่มขึ้น 45% ต่อชั่วโมง ถ้ามีจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาเริ่มต้น 500 เซลล์
   1) จงหาจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง
   2) จงหาว่าต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ชั่วโมง จึงจะมีจำนวนแบคทีเรีย 10,000 เซลล์

5. ซีเซียม-137 มีครึ่งชีวิต 30 ปี ถ้ามีซีเซียม-137 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 กรัม
   1) จงหาปริมาณของซีเซียม-137 ที่เหลือ เมื่อเวลาผ่านไป 80 ปี
   2) จงหาว่าต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ปี จึงจะมีซีเซียม-137 เหลืออยู่ 2 กรัม

6. ถ้าสารกัมมันตรังสีจำนวน 250 มิลลิกรัม สลายตัวเหลืออยู่ 200 มิลลิกรัม ในเวลา 48 ชั่วโมง จงหาครึ่งชีวิตของสารนี้

7. ถ้าระดับเสียงของรถไฟฟ้าขบวนหนึ่งเป็น 98 เดซิเบล จงหาความเข้มเสียงของรถไฟฟ้าขบวนนี้

8. ถ้าค่า pH ของนมชนิดหนึ่งเท่ากับ 6.5 จงหาความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนในนมชนิดนี้

กิจกรรม : สำรวจการลดอุณหภูมิของน้ำร้อน

อุปกรณ์

1. แก้วบรรจุน้ำร้อนปริมาตรประมาณ 20 มิลลิลิตร
2. เทอร์มอมิเตอร์
3. นาฬิกาจับเวลา (หน่วยเป็นวินาที)

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. บันทึกอุณหภูมิห้องที่อ่านได้จากเทอร์มอมิเตอร์
2. นำเทอร์มอมิเตอร์จุ่มลงในแก้วบรรจุน้ำร้อนที่มีอุณหภูมิไม่ต่ำกว่า 60 องศาเซลเซียส
3. เมื่อระดับของเหลวของเทอร์มอมิเตอร์หยุดนิ่ง ให้เริ่มจับเวลา และอ่านอุณหภูมิ
4. บันทึกอุณหภูมิที่อ่านได้จากเทอร์มอมิเตอร์ทุก ๆ 30 วินาที

วินาทีที่ (x)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
อุณหภูมิ (y)											

วินาทีที่ (x)	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630
อุณหภูมิ (y)											

วินาทีที่ (x)	660	690	720	750	780	810	840	870	900	930	960
อุณหภูมิ (y)											

วินาทีที่ (x)	990	1,020	1,050	1,080	1,110	1,140	1,170	1,200
อุณหภูมิ (y)								

5. นำข้อมูลที่บันทึกในข้อ 4 ไปเขียนกราฟ โดยให้แกน X แสดงเวลา และแกน Y แสดงอุณหภูมิของน้ำ
6. จากกราฟที่ได้ในข้อ 5
   6.1 เมื่อเวลาผ่านไป อุณหภูมิของน้ำมีค่าเข้าใกล้ค่าใด เพราะเหตุใด
   6.2 ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำมีกราฟเป็นลักษณะใด เพราะเหตุใด
7. จากข้อ 6 สมมติว่าสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำ คือ $y = k + ab^x$ โดยที่ k แทนอุณหภูมิห้อง และ a, b เป็นค่าคงตัว ซึ่งหาได้โดยการทำตามขั้นตอนต่อไปนี้
   7.1 เขียนกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างเวลา (x) และ $\log(y-k)$
   7.2 กราฟที่ได้ในข้อ 7.1 ใกล้เคียงกับกราฟเชิงเส้น เพราะเหตุใด หาสมการแสดงความสัมพันธ์นี้
   7.3 จากสมการแสดงความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ 7.2 หาค่า a และ b และหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำ
   7.4 เขียนกราฟของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำที่ได้ในข้อ 7.3 ลงในกราฟข้อ 5 เพื่อเปรียบเทียบว่ากราฟของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำที่ได้ใกล้เคียงกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองหรือไม่

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย โดยที่เลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนบวก

1) $\left(12x^2y^4\right)\left(\frac{1}{2}x^5y\right)$

2) $\left(\frac{x^{-1}yz^{-2}}{y^{-5}zx^{-8}}\right)^{-1}$

3) $\left(\frac{xy^{-\frac{1}{2}}}{9x^{\frac{3}{2}}}\right)^2$

4) $\left(\frac{-8y^{-2}}{x^6y}\right)^{\frac{1}{3}}$

5) $\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$

6) $\frac{2}{\sqrt[3]{-8x^6}}$

7) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2$

8) $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right)$

9) $\left(\sqrt[4]{64}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt[5]{\frac{243}{32}}-\sqrt[3]{-64}\right)$

10) $2\sqrt{27}-\sqrt[4]{144}+3\sqrt[6]{27}$

11) $(0.027)^{\frac{2}{3}}$

12) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

13) $\left(\frac{125x^3y^4}{27x^{-6}y}\right)^{\frac{1}{3}}$

14) $\frac{\sqrt[3]{x^2}+2+x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{x^{-2}}}$

2. จงเขียนจำนวนจริงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt[4]{9}}$

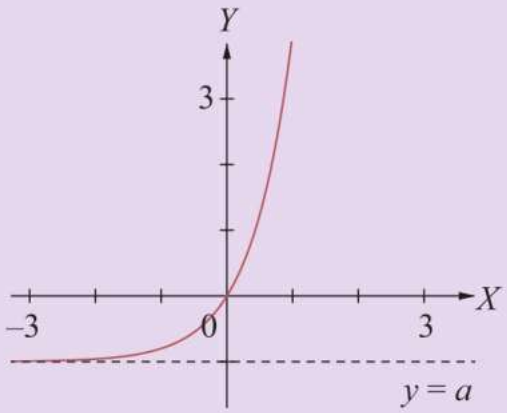
2) $\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

3) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

4) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}}$

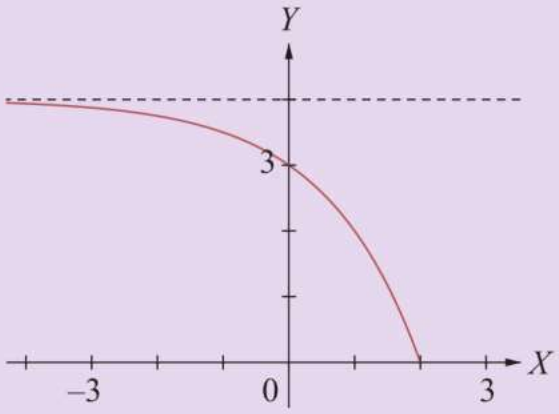
3. กำหนดให้ $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ และ $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ จงหาค่าของ $\sqrt{x^2+6xy+y^2}$

4. กำหนดให้ $f(x)=5^x-1$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



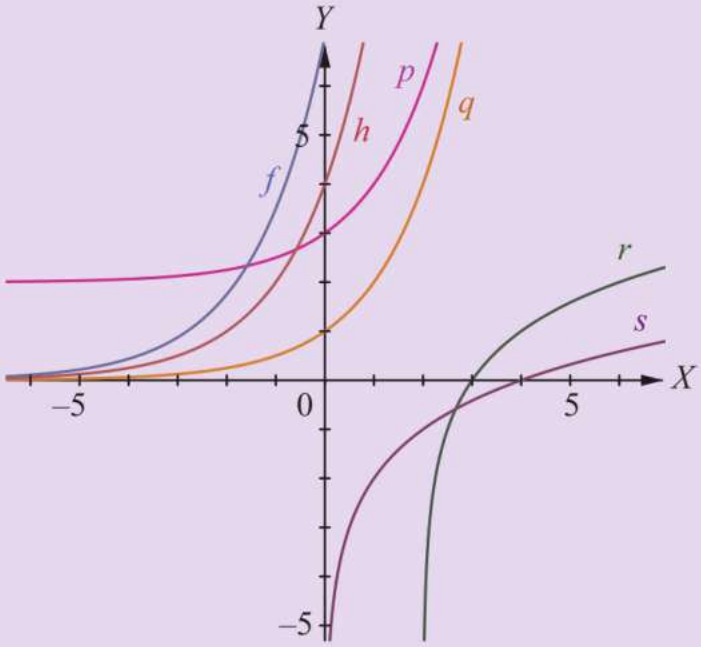
1) จงหาค่าของ a
2) จงหาค่าของ b เมื่อ $f(b)=24$
3) จงหาโดเมนของ f^{-1}

5. กำหนดให้ $f(x)=4-2^x$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$ และ $x\le 2$ สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



1) จงหาโดเมนของ f
2) จงหาโดเมนของ f^{-1}
3) จงหาค่าของ b เมื่อ $f^{-1}(b)=-2$

6. จากกราฟ



จงพิจารณาว่ากราฟของ f, h, p, q, r และ s เป็นกราฟของฟังก์ชันใดในแต่ละข้อต่อไปนี้

(ก) $y = 2^x$

(ข) $y = 2^x + 2$

(ค) $y = 2^{x+2}$

(ง) $y = 7 \cdot 2^x$

(จ) $y = \log_2(x-2)$

(ฉ) $y = \log_2 x - 2$

7. จงหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = 2 \cdot 3^x + 1$

2) $f(x) = 2^{1-x}$

3) $f(x) = \log_5(2x+1)$

4) $f(x) = \ln(3x) - 5$

8. จงหาเซตคำตอบของสมการและอสมการต่อไปนี้

1) $3^{2x+1} = 1 - 2 \cdot 3^x$

2) $11^{2-x} = 2^{x-1}$

3) $\log_{16}(x-1) = 0.25$

4) $\log_5(x-1) + 2 = 0$

5) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1) = 3$

6) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

7) $\frac{9}{25} \le \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{125}{27}$

8) $2^{2x+1} - 12 \cdot 2^x + 16 < 0$

9) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) < 4$

10) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(2x^2-2x-4\right)} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(-3x-3)}$

9. กำหนดให้ $\log_2\left(2^{3-2x}\right) = 6 + \log_2\left(8 \cdot 2^x\right)$ จงหาค่าของ $2^{\log_2(5+x)}$

10. ในเมืองหนึ่งมีประชากรอาศัยอยู่ 10,000 คน ถ้าจำนวนประชากรในปีต่อ ๆ ไป หาได้จาก $f(x) = 10000(1.3)^{\frac{x}{10}}$ เมื่อ x แทนจำนวนปี ในอีก 10 ปีข้างหน้า จะมีจำนวนประชากรในเมืองแห่งนี้ประมาณกี่คน

11. การฝากเงินที่มีการคิดดอกเบี้ยทบต้นต่อปีหาได้จาก $B(n) = B_0(1+r)^n$ เมื่อ $B(n)$ แทนเงินฝากในบัญชี เมื่อสิ้นสุดปีที่ n B_0 แทนเงินฝากเริ่มต้น และ r แทนอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อปี ธนาคารแห่งหนึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นร้อยละ 3 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยเป็นรายปี ถ้าต้องการให้เงินในบัญชีเป็นสามเท่าของเงินต้น จะใช้เวลาฝากเงินกับธนาคารนี้อย่างน้อยกี่ปี

12. กำหนดให้จำนวนแบคทีเรียชนิด A ในจานเพาะเชื้อ เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ $n_A(t) = 500e^{0.45t}$ และจำนวนแบคทีเรียชนิด B ในจานเพาะเชื้อเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ $n_B(t) = 400e^{0.5t}$

1) จงหาจำนวนแบคทีเรียชนิด A และ B เมื่อเวลาเริ่มต้น
2) เป็นไปได้หรือไม่ที่แบคทีเรียชนิด B จะมีจำนวนมากกว่าแบคทีเรียชนิด A หากเป็นไปได้ จงหาเวลาที่แบคทีเรียชนิด B จะมีจำนวนมากกว่าแบคทีเรียชนิด A

13. การสลายตัวของสารกัมมันตรังสีที่มีครึ่งชีวิต h วัน มีสูตรการหาปริมาณสารที่เหลืออยู่คือ $m(t) = m_0e^{-rt}$ เมื่อ $m(t)$ แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่ เมื่อเวลาผ่านไป t วัน m_0 แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสี ณ จุดเริ่มต้น และ $r = \frac{\ln 2}{h}$ ถ้าสารกัมมันตรังสีจำนวนเริ่มต้น 300 มิลลิกรัม สลายตัวเหลือ 200 มิลลิกรัม ในเวลา 48 ชั่วโมง และถ้าต้องการให้สารกัมมันตรังสีชนิดนี้สลายตัวเหลือ 100 มิลลิกรัม จะใช้เวลานานเท่าใด เมื่อคำนวณจากเวลาเริ่มต้น

14. คาร์บอน-14 เป็นไอโซโทปกัมมันตรังสี มีครึ่งชีวิตประมาณ 5,730 ปี คาร์บอน-14 สามารถพบได้ในสิ่งมีชีวิตทุกชนิด โดยเมื่อสิ่งมีชีวิตตาย คาร์บอน-14 ที่มีอยู่เดิมจะสลายตัว ทำให้ปริมาณคาร์บอน-14 ลดลงไปเรื่อย ๆ จึงสามารถคำนวณการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีโดยใช้ฟังก์ชันในข้อ 13 หาอายุของซากดึกดำบรรพ์ เรียกวิธีการนี้ว่า การหาอายุจากคาร์บอนกัมมันตรังสี (radiocarbon dating) ซึ่งอายุของซากดึกดำบรรพ์ที่ต้องการหาไม่ควรเกิน 70,000 ปี

1) มัมมี่ของชาวอียิปต์โบราณมีปริมาณคาร์บอน-14 เหลืออยู่สามในห้าของปริมาณคาร์บอน-14 ในคนปกติ จงหาว่าชาวอียิปต์โบราณตายไปแล้วประมาณกี่ปี
2) ถ่านจากต้นไม้ที่ไหม้ในช่วงการระเบิดของภูเขาไฟมีปริมาณคาร์บอน-14 เหลืออยู่เพียง 45% จากปริมาณเดิม จงหาว่าภูเขาไฟระเบิดไปแล้วอย่างน้อยกี่ปี

15. ในการปรับปริมาณการให้ยาชนิดหนึ่งกับคนไข้ พบว่า เมื่อรับประทานยาเข้าไป ร่างกายจะขับยาที่เป็นส่วนเกินออกทางปัสสาวะ ถ้าคนไข้ได้รับยาชนิดนี้ 10 มิลลิกรัม และให้ $A(t)$ เป็นปริมาณยาที่เหลืออยู่ในร่างกายมีหน่วยเป็นมิลลิกรัม เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง จะได้ว่า $A(t)=10(0.8)^t$ ถ้าต้องการให้ปริมาณยาที่เหลืออยู่ในร่างกายน้อยกว่า 1 มิลลิกรัม จะต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ชั่วโมง

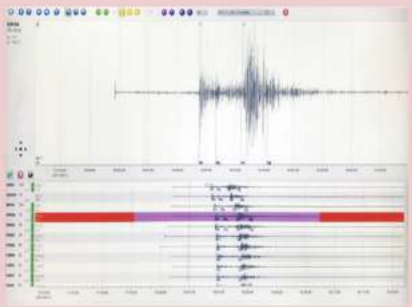
16. การหาขนาดแผ่นดินไหวในปัจจุบันจะนิยมใช้มาตราขนาดโมเมนต์แผ่นดินไหว (moment magnitude scale) ที่คำนวณจากโมเมนต์แผ่นดินไหว ดังนี้ $M_w=\frac{2}{3}\log M_0-10.7$ เมื่อ M_w แทนขนาดแผ่นดินไหว และ M_0 แทนโมเมนต์แผ่นดินไหว

1) แผ่นดินไหวที่เมืองซานฟรานซิสโก รัฐแคลิฟอร์เนีย ใน ค.ศ. 1906 มีโมเมนต์แผ่นดินไหวเป็น 5.6×10^{27} จงหาขนาดแผ่นดินไหว ตามมาตราขนาดโมเมนต์แผ่นดินไหว

2) ใน ค.ศ. 2004 ฝั่งตะวันตกของเกาะสุมาตราของประเทศอินโดนีเซียเกิดแผ่นดินไหวที่มีขนาดแผ่นดินไหว 9.1 ตามมาตราขนาดโมเมนต์แผ่นดินไหว จงหาโมเมนต์แผ่นดินไหวของการเกิดแผ่นดินไหวครั้งนี้

เสริมสมอง : เครื่องวัดคลื่นไหวสะเทือน

เครื่องวัดคลื่นไหวสะเทือน (seismograph) เป็นเครื่องมือที่ใช้วัดคลื่นไหวสะเทือนที่เกิดจากแผ่นดินไหว ประกอบด้วยเครื่องรับความสั่นสะเทือน ซึ่งจะแปลงสัญญาณความสั่นสะเทือนเป็นสัญญาณไฟฟ้า จากนั้นสัญญาณไฟฟ้าจะถูกขยายด้วยระบบขยายสัญญาณ และแปลงกลับมาเป็นสัญญาณดิจิทัล ทำให้ทราบว่าคลื่นแผ่นดินไหวเดินทางมาถึงสถานีเมื่อใด



ที่มา : กรมอุตุนิยมวิทยา

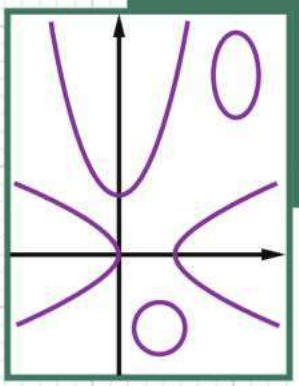
17. การลดลงของอุณหภูมิของร่างกายของผู้ตาย (postmortem cooling) สามารถนำไปใช้ทำนายระยะเวลาหลังการตายอย่างคร่าว ๆ ได้ โดยการเขียนฟังก์ชันของอุณหภูมิเทียบกับเวลาดังนี้ $T(t) = T_E + (T_0 - T_E)e^{-Zt}$ โดย T_0 แทนอุณหภูมิศีรษะของคนทั่วไป (องศาเซลเซียส) T_E แทนอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม (องศาเซลเซียส) Z มีค่าเท่ากับ 0.1 มีหน่วยเป็น $1/$ชั่วโมง $T(t)$ แทนอุณหภูมิของผู้ตายขณะที่พบศพ (องศาเซลเซียส) และ t แทนระยะเวลาหลังการตาย (ชั่วโมง)

สมมติว่าพบศพที่ข้างทางเปลี่ยวบนดอย โดยวัดอุณหภูมิสิ่งแวดล้อมได้ 14°C และวัดอุณหภูมิของผู้ตายได้ 21°C ถ้ากำหนด T_0 เป็น 37°C จงหาว่าผู้ตายเสียชีวิตมาแล้วอย่างน้อยกี่ชั่วโมง

เสริมสมอง : การหาระยะเวลาหลังการตาย

การหาระยะเวลาหลังการตายโดยการลดลงของอุณหภูมิ สามารถคลาดเคลื่อนได้ค่อนข้างมาก เนื่องจากยังมีปัจจัยอื่น ๆ ที่ส่งผลต่อการลดลงของอุณหภูมิ เช่น อุณหภูมิของผู้ตายก่อนเสียชีวิต การออกกำลังกาย โรคประจำตัว สภาพการเปียกการแห้งของร่างกาย ดังนั้น ถ้าจะหาระยะเวลาหลังการตายที่มีความคลาดเคลื่อนน้อย แพทย์นิติเวชผู้ทำหน้าที่ชันสูตรพลิกศพจะใช้ความรู้เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงหลังการตายอื่น ๆ มาประกอบกัน เท่าที่สภาพของผู้ตายเอื้ออำนวย เช่น การตกของเม็ดเลือดแดงตามแรงโน้มถ่วง การแข็งตัวของกล้ามเนื้อ ปริมาณอาหารในกระเพาะ และการเจริญเติบโตของหนอน

บทที่ 3 | เรขาคณิตวิเคราะห์



3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์
- 3.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด
- 3.1.2 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง
- 3.1.3 ความชันของเส้นตรง
- 3.1.4 เส้นขนาน
- 3.1.5 เส้นตั้งฉาก
- 3.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง
- 3.1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

3.2 ภาคตัดกรวย
- 3.2.1 วงกลม
- 3.2.2 วงรี
- 3.2.3 พาราโบลา
- 3.2.4 ไฮเพอร์โบลา
- 3.2.5 การเลื่อนกราฟ

จุดมุ่งหมาย

1. หาระยะทางระหว่างจุดสองจุด และหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง
2. หาความชันของเส้นตรง และใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก
3. เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง
4. หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน
5. เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา
6. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา

บทที่ 3

เรขาคณิตวิเคราะห์

“

ในสมัยโบราณ นักดาราศาสตร์เชื่อว่า โลกเป็นศูนย์กลางของเอกภพ จนกระทั่ง Nicolaus Copernicus (ค.ศ. 1473 – 1543) นักดาราศาสตร์ชาวโปแลนด์ได้เสนอแนวคิดว่า ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงกลม ภายหลัง Johannes Kepler (ค.ศ. 1571 – 1630) นักดาราศาสตร์ชาวเยอรมันได้เสนอแบบจำลองที่อธิบายการโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสหนึ่งของวงโคจรนั้น ตามกฎการเคลื่อนที่ของเคพเลอร์ นอกจากดาวเคราะห์แล้ว วัตถุในระบบสุริยะอื่น ๆ จะมีการโคจรในลักษณะเดียวกัน เช่น การโคจรของดาวหาง การโคจรของดวงจันทร์

”

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สมการเชิงเส้นสองตัวแปร พาราโบลา และการแยกตัวประกอบของพหุนามในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

goo.gl/QwPfJz

3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน ซึ่งการแก้ปัญหาทางพีชคณิตบางปัญหาอาจนำความรู้ทางเรขาคณิตมาช่วยแก้ปัญหา หรือการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบางปัญหาก็อาจนำความรู้ทางพีชคณิตมาช่วยแก้ปัญหา ซึ่งทำให้เรขาคณิตวิเคราะห์พัฒนาไปอย่างรวดเร็ว

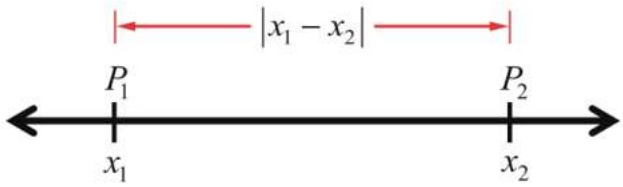
เสริมสมอง : René Descartes

René Descartes (ค.ศ. 1596 – 1650) นักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ และนักปราชญ์ชาวฝรั่งเศส เป็นผู้ริเริ่มวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ ที่มีการเชื่อมโยงพีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน โดยมุ่งศึกษาการลงจุดบนระบบพิกัดฉากแล้วหาสมการทางพีชคณิต

3.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

บนเส้นจำนวน ถ้าจุด P_1 แทนจำนวนจริง x_1 และจุด P_2 แทนจำนวนจริง x_2 ระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 คือ ค่าสัมบูรณ์ของ $x_1 - x_2$ เขียนแทนด้วย P_1P_2 หรือ $\left|\overline{P_1P_2}\right|$

นั่นคือ $P_1P_2 = \left|\overline{P_1P_2}\right| = |x_1 - x_2|$



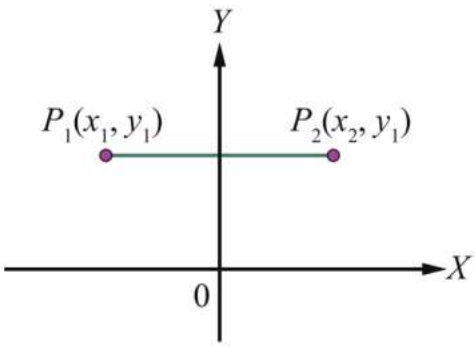
รูปที่ 1

บนระบบพิกัดฉาก ถ้าจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ที่ $\overline{P_1P_2}$ ขนานกับแกน X หรือขนานกับแกน Y แล้วสามารถหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 ซึ่งเขียนแทนด้วย P_1P_2 หรือ $\left|\overline{P_1P_2}\right|$ ได้ดังนี้

1) ถ้า $\overline{P_1P_2}$ ขนานกับแกน X จะได้ $P_1P_2 = |x_1 - x_2|$ ซึ่งแสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้

ให้จุด P_1 และ P_2 อยู่บนส่วนของเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน X

จะได้ $y_1 = y_2$ (ดังรูปที่ 2ก)



รูปที่ 2ก

ให้ A และ B เป็นจุดที่ $\overline{P_1A}$ และ $\overline{P_2B}$ ตั้งฉากกับแกน X ตามลำดับ

จะได้ $(x_1, 0)$ เป็นพิกัดของจุด A

$(x_2, 0)$ เป็นพิกัดของจุด B

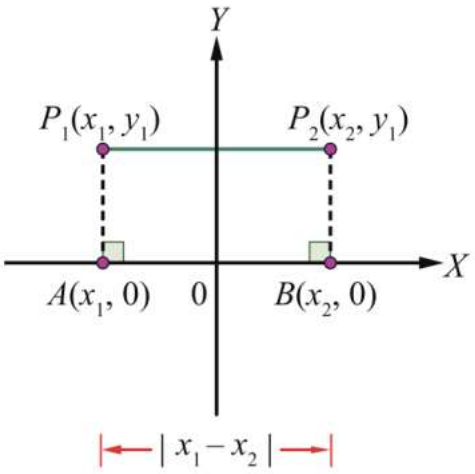
(ดังรูปที่ 2ข)

ดังนั้น $AB = |x_1 - x_2|$

แต่ $\overline{P_1P_2}$ และ $\overline{AB}$ เป็นด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก P_1P_2BA

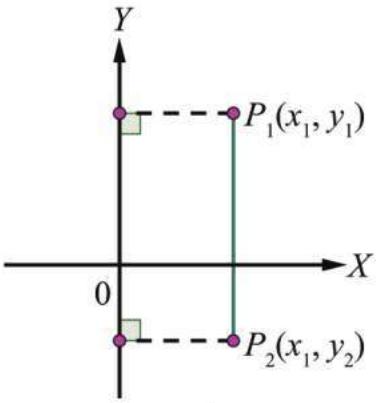
ดังนั้น $P_1P_2 = AB$

นั่นคือ $P_1P_2 = |x_1 - x_2|$



รูปที่ 2ข

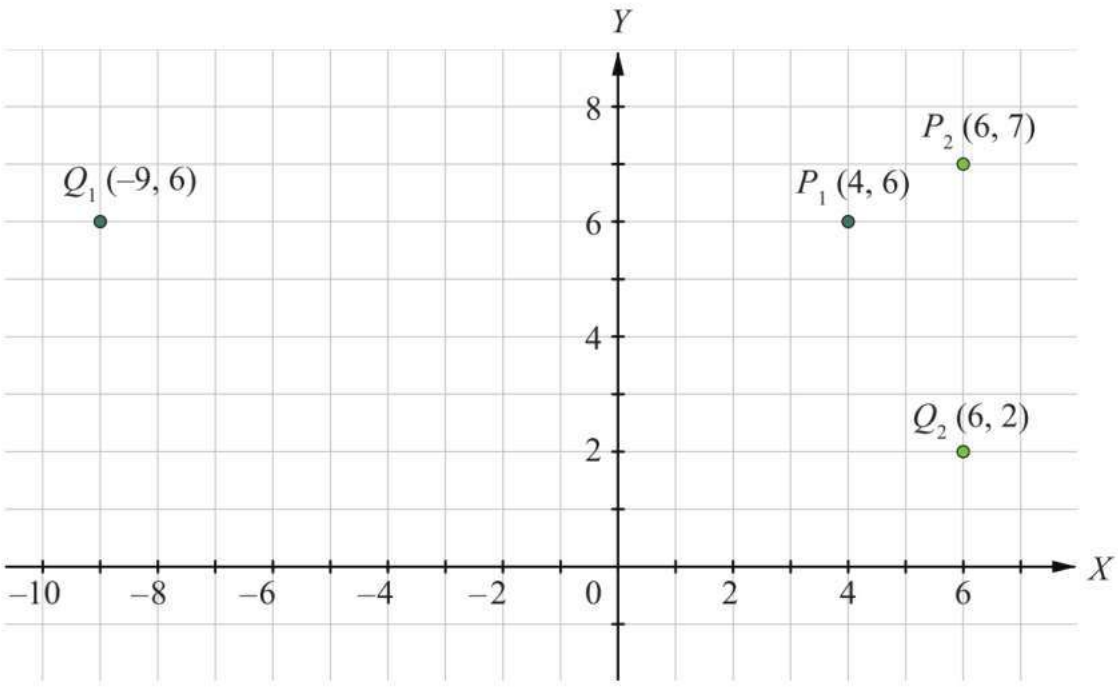
2) ถ้า $\overline{P_1P_2}$ ขนานกับแกน Y
จะได้ $P_1P_2 = |y_1 - y_2|$
ซึ่งแสดงให้เห็นจริงได้ในทำนอง
เดียวกันกับข้อ 1)
เมื่อจุด P_1 และ P_2 อยู่บนส่วนของ
เส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y
จะได้ $x_1 = x_2$ (ดังรูปที่ 3)



รูปที่ 3

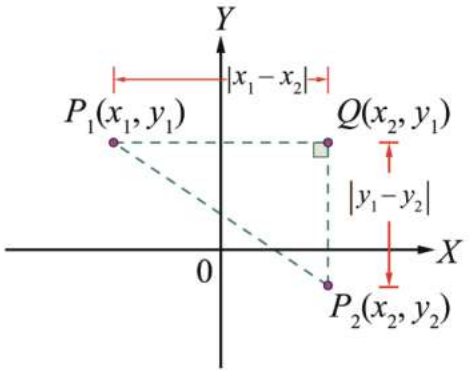
ตัวอย่างที่ 1

จงหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ Q_1 และระยะทางระหว่างจุด P_2 และ Q_2 ซึ่งมีพิกัดดังรูป



วิธีทำ เนื่องจาก $\overline{P_1Q_1}$ ขนานกับแกน X จะได้ $P_1Q_1 = |4-(-9)| = 13$
เนื่องจาก $\overline{P_2Q_2}$ ขนานกับแกน Y จะได้ $P_2Q_2 = |7-2| = 5$ ■

ในกรณีที่จุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y (ดังรูปที่ 4) จะหา P_1P_2 ได้ดังนี้



รูปที่ 4

ลากส่วนของเส้นตรง P_1Q และ P_2Q ให้ขนานกับแกน X และแกน Y ตามลำดับ จุด Q จะมีพิกัดเป็น (x_2, y_1) และมุม P_1QP_2 เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{P_1Q^2 + P_2Q^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

(เนื่องจาก $|a|^2 = a^2$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ)

ข้อสังเกต ในกรณีที่จุด P_1 และ P_2 อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน X จะได้ $y_1 = y_2$
ดังนั้น $P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$
ในกรณีที่จุด P_1 และ P_2 อยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y จะได้ $x_1 = x_2$
ดังนั้น $P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$

ดังนั้น จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ตัวอย่างที่ 2

จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(1, 7)$ และ $P_2(-5, 2)$

วิธีทำ $P_1P_2 = \sqrt{(1-(-5))^2 + (7-2)^2} = \sqrt{61}$ ■

ตัวอย่างที่ 3

จงหาพิกัดของจุด P บนแกน X เมื่อ P อยู่ห่างจากจุด $P_1(1, -2)$ และจุด $P_2(3, 5)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

วิธีทำ จากโจทย์ ให้ $P(x, 0)$ เป็นจุดซึ่งทำให้ $PP_1 = PP_2$

จะได้ $PP_1 = \sqrt{(x-1)^2 + (0+2)^2}$

$PP_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (0-5)^2}$

ดังนั้น $\sqrt{(x-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (0-5)^2}$

$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 25}$

$$\sqrt{x^2-2x+5} = \sqrt{x^2-6x+34}$$

$$x^2-2x+5 = x^2-6x+34$$

$$4x = 29$$

$$x = \frac{29}{4}$$

ดังนั้น จุด P มีพิกัดเป็น $\left(\frac{29}{4}, 0\right)$

ตรวจคำตอบ โดยการแทนค่าจะเห็นว่า $PP_1 = PP_2$

เนื่องจาก $PP_1 = \sqrt{\left(\frac{29}{4}-1\right)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{\frac{689}{16}}$

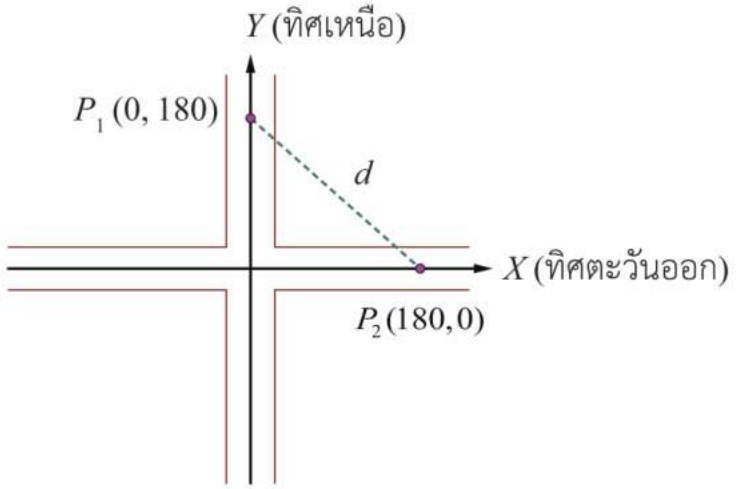
$$PP_2 = \sqrt{\left(\frac{29}{4}-3\right)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{\frac{689}{16}}$$

ดังนั้น $P\left(\frac{29}{4}, 0\right)$ เป็นจุดบนแกน X ที่อยู่ห่างจากจุด $P_1(1, -2)$ และจุด $P_2(3, 5)$ เป็นระยะทางเท่ากัน ■

ตัวอย่างที่ 4

รถสองคันวิ่งออกจากสี่แยกพร้อมกัน คันแรกมุ่งหน้าไปทางทิศเหนือ คันที่สองมุ่งหน้าไปทางทิศตะวันออก รถทั้งสองคันวิ่งด้วยความเร็วคงที่ 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง รถทั้งสองคันอยู่ห่างกันกี่กิโลเมตร

วิธีทำ เริ่มต้นด้วยการวางพิกัดให้กับวัตถุต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
ให้จุดกำเนิดเป็นจุดกึ่งกลางของสี่แยก
แกน Y อยู่แนวกึ่งกลางถนนในแนวเหนือ-ใต้
แกน X อยู่แนวกึ่งกลางถนนในแนวตะวันออก-ตะวันตก



เนื่องจากรถทั้งสองคันวิ่งออกจากสี่แยกพร้อมกันด้วยความเร็วคงที่ 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จะได้ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง รถแต่ละคันจะวิ่งได้ระยะทางทั้งหมด $60\times 3=180$ กิโลเมตร

เมื่อกำหนดให้ระยะทาง 1 หน่วยในกราฟ แทนระยะทาง 1 กิโลเมตร

จะได้ว่า พิกัดของรถคันแรกเป็น $P_1(0,180)$

พิกัดของรถคันที่สองเป็น $P_2(180,0)$

จะได้ $P_1P_2 = \sqrt{(0-180)^2+(180-0)^2}$

$= \sqrt{64800}$

≈ 254.56

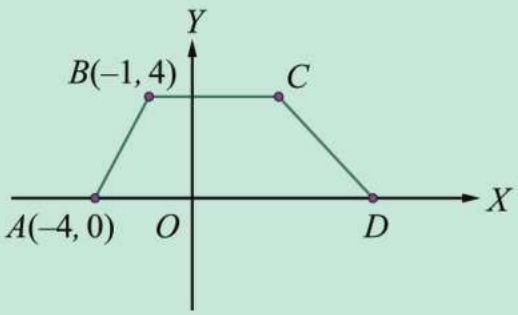
ดังนั้น รถทั้งสองคันอยู่ห่างกันประมาณ 254.56 กิโลเมตร ■

แบบฝึกหัด 3.1.1

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

1) $(0, 0)$ และ $(3, 0)$
2) $(-6, 4)$ และ $(-6, 17)$
3) $(2, 5)$ และ $(9, 5)$
4) $(0, 0)$ และ $(-2, 5)$
5) $(3, -2)$ และ $(5, 0)$
6) $(-4, 7)$ และ $(6, 7)$
7) $(-1, -2)$ และ $(3, -4)$
8) $(0, 0)$ และ (s, t)
9) $(0, s)$ และ $(t, 0)$
10) $(0, s+t)$ และ $(s+t, 0)$

2. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังรูป โดยที่ $\overline{BC}$ ยาว 8 หน่วย ถ้าจุด A มีพิกัดเป็น $(-4,0)$ จุด B มีพิกัดเป็น $(-1, 4)$ และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูนี้เท่ากับ 48 ตารางหน่วย จงหา



1) พิกัดของจุด C
2) AB
3) พิกัดของจุด D

3. จงแสดงว่าจุด $(1, 1), (-1,-1)$ และ $(-4, 2)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

4. จงหาความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งจุด A มีพิกัดเป็น $(3, 4)$ จุด B มีพิกัดเป็น $(7, 8)$ และจุด C มีพิกัดเป็น $(-1, -2)$

5. จงหาค่า y ถ้ากำหนดให้ $(4, y)$ อยู่ห่างจากจุด $(-5, 2)$ และ $(13, -6)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

6. จงหาจุดซึ่งอยู่บนแกน Y และอยู่ห่างจากจุด $(2, 5)$ และ $(3, -7)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

7. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุด $(6, 8), (4, 6)$ และ $(-2, -2)$ เป็นจุดยอด รูปสามเหลี่ยมรูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือไม่ เพราะเหตุใด

8. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุด $(10, 0), (-12, 0)$ และ $(-8, 8)$ เป็นจุดยอด จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้

9. จุด $(0, 0), (8, 18)$ และ $(12, 27)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

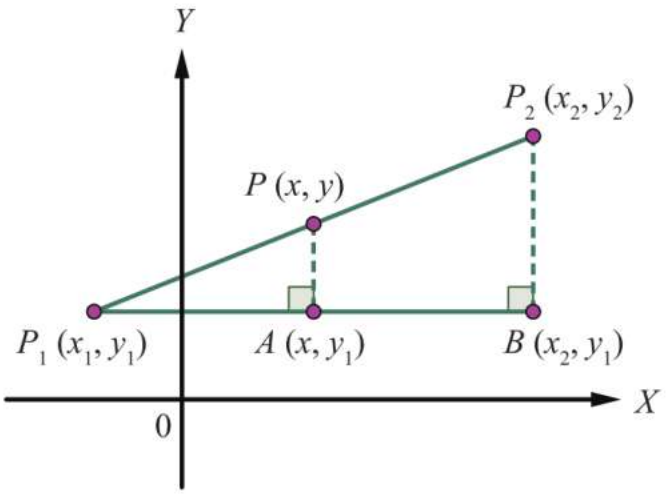
10. จงบอกเงื่อนไขที่ทำให้จุด P_1, P_2 และ P_3 ใด ๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

11. รถสองคันวิ่งออกจากสี่แยกพร้อมกัน คันแรกมุ่งหน้าไปทางทิศเหนือด้วยความเร็วคงที่ 45 กิโลเมตรต่อชั่วโมง คันที่สองมุ่งหน้าไปทางทิศตะวันตกด้วยความเร็วคงที่ 108 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
    1) จงหาระยะห่างระหว่างรถทั้งสองคัน เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง
    2) จงหาระยะห่างระหว่างรถทั้งสองคัน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ชั่วโมง
    3) รถทั้งสองคันจะอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 39 กิโลเมตร เมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด

⍟ 12. แก้วและกล้าเข้าค่ายลูกเสือในป่าด้วยกัน แก้วตื่นแต่เช้าและออกเดินไปทางทิศเหนือตั้งแต่ 7:00 น. ด้วยความเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง กล้าตื่นสายและเริ่มออกเดินไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้เวลา 8:00 น. ด้วยความเร็ว $3\sqrt{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่าแก้วและกล้าจะอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง $3\sqrt{29}$ กิโลเมตร ณ เวลาใด

3.1.2 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 โดยที่จุด P_1 มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และจุด P_2 มีพิกัดเป็น (x_2, y_2) สามารถหาพิกัดของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 โดยพิจารณาจากรูปที่ 5 ดังนี้



รูปที่ 5

ให้ $\overline{P_1B}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และตั้งฉากกับ $\overline{PA}$ และ $\overline{P_2B}$ ซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ที่จุด A และ B ตามลำดับ

จะได้ จุด A มีพิกัดเป็น (x, y_1)

จุด B มีพิกัดเป็น (x_2, y_1)

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม P_1AP คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม P_1BP_2

จะได้ $$\frac{P_1A}{P_1B} = \frac{P_1P}{P_1P_2}$$

แต่ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$

จะได้ $$\frac{P_1P}{P_1P_2} = \frac{1}{2}$$

นั่นคือ $$\frac{P_1A}{P_1B} = \frac{1}{2}$$

$$P_1A = \frac{1}{2}P_1B$$

จะได้ $P_1A = AB$

หรือ $|x - x_1| = |x_2 - x|$

เนื่องจาก x อยู่ระหว่าง x_1 และ x_2 ดังนั้น $x_1 < x < x_2$ หรือ $x_2 < x < x_1$ เพราะฉะนั้น $x - x_1$ และ $x_2 - x$ จะเป็นจำนวนบวกเหมือนกันหรือเป็นจำนวนลบเหมือนกัน

ดังนั้น $x - x_1 = x_2 - x$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถแสดงได้ว่า

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ดังนั้น จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2

กำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 แล้ว $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ และ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

ตัวอย่างที่ 5

จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่มี $P_1(-3, 5)$ และ $P_2(4, -1)$ เป็นจุดปลาย

วิธีทำ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$

จะได้ $x = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{5-1}{2} = 2$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$ คือ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ■

ตัวอย่างที่ 6

จุด P เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 พิกัดของจุด P และ P_1 คือ $(2, 3)$ และ $(5, 4)$ ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด P_2

วิธีทำ ให้ (x_2, y_2) เป็นพิกัดของจุด P_2

เนื่องจาก $P(2, 3)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2

ดังนั้น $2 = \frac{5+x_2}{2}$ และ $3 = \frac{4+y_2}{2}$

จะได้ $x_2 = -1$ และ $y_2 = 2$

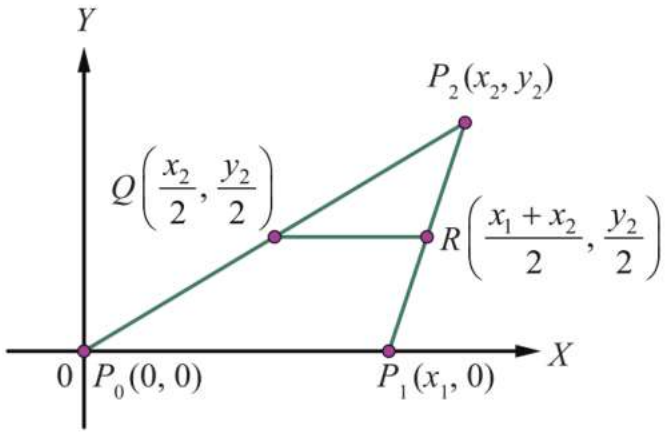
ดังนั้น จุด P_2 มีพิกัดเป็น $(-1, 2)$ ■

ตัวอย่างที่ 7

จงพิสูจน์ว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

วิธีทำ พิจารณารูปสามเหลี่ยม $P_0P_1P_2$

เขียนแกนพิกัดฉาก XY ที่ทำให้พิกัดของจุด P_0, P_1 และ P_2 เป็น $(0, 0)$, $(x_1, 0)$ และ (x_2, y_2) ตามลำดับ ดังรูป



ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_0P_2}$ และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$

จุด Q และ R จะมีพิกัดเป็น $\left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$ และ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$ ตามลำดับ

$$QR = \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2}{2}-\frac{y_2}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}|x_1|$$

แต่ $P_0P_1 = |x_1|$ ดังนั้น $QR = \frac{1}{2}P_0P_1$

นั่นคือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม ■

แบบฝึกหัด 3.1.2

1. จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้
   1) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ และ $(3, -1)$
   2) $\left(3, -\frac{5}{2}\right)$ และ $(-3, -9)$
   3) $(-1, -3)$ และ $(5, 3)$
   4) $(-3, -2)$ และ $(-1, -1)$

2. จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ จงหาพิกัดของจุด P ถ้า
   1) จุด M มีพิกัดเป็น $(1, 2)$ และจุด Q มีพิกัดเป็น $(3, 4)$
   2) จุด M มีพิกัดเป็น $(5, 6)$ และจุด Q มีพิกัดเป็น $(15, -4)$

3. จงแสดงว่าจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดที่ $A(2, 1), B(7, 1), C(9, 3)$ และ $D(4, 3)$ เป็นจุดเดียวกัน

4. จงหาพิกัดของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(3x_1, 3y_1)$

5. ให้ P มีพิกัดเป็น $(2, 1)$ และ Q มีพิกัดเป็น $(6, 5)$ จงหาความยาวของส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด $A(8, 2)$ กับจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ

6. จงหาพิกัดของจุดปลายของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(4, 9), B(3, 8)$ และ $C(-1, 2)$

7. ให้ $R(-7, -5), S(3, 7)$ และ $T(6, 1)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานจากจุด S ไปยังด้าน RT

8. ให้ $A(-4, 3), B(4, 5), C(8, 11)$ และ $D(-8, 7)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม และ P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ จงหาความยาวของเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม $PQRS$

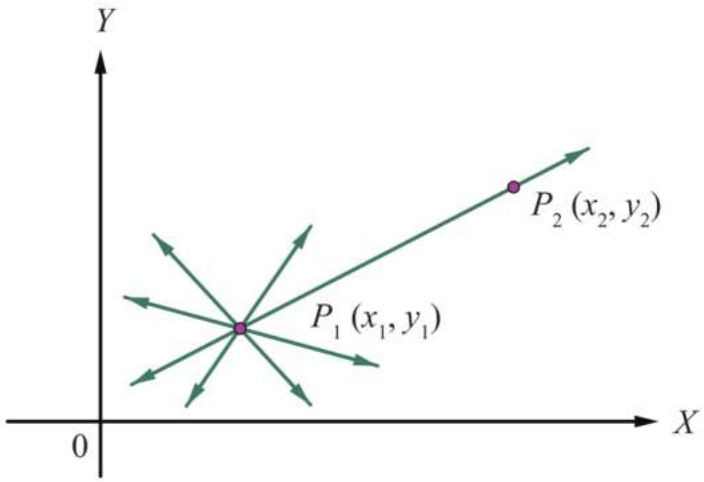
9. กำหนดให้ $A(2, 7)$ และ $B(-5, 6)$ เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง จงหาพิกัดของจุดบนส่วนของเส้นตรงนี้ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะทาง $\frac{3}{4}$ เท่าของระยะทางระหว่าง A และ B

10. จงแสดงว่าถ้าเส้นมัธยฐานสองเส้นของรูปสามเหลี่ยมยาวเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

11. จงพิสูจน์ว่าระยะทางระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับจุดยอดทั้งสามเท่ากัน

12. จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

3.1.3 ความชันของเส้นตรง



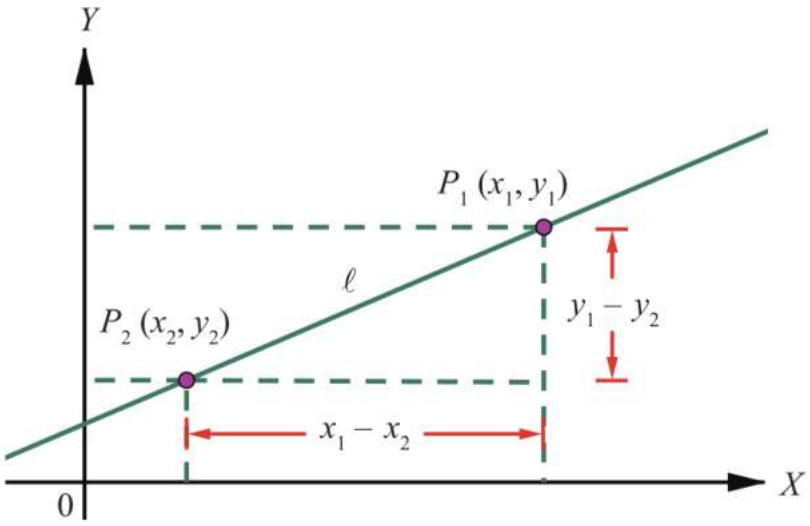
รูปที่ 6

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดในระนาบ (ดังรูปที่ 6) จะสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด P_1 ได้หลายเส้น แต่ถ้าให้ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดอีกจุดหนึ่งในระนาบ จะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด P_1 และ P_2 ดังนั้น ถ้ากำหนดจุดให้สองจุด จะลากเส้นตรงผ่านจุดสองจุดนี้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น นอกจากนี้ ถ้ากำหนดจุดให้เพียงจุดเดียวและความชัน ก็จะสามารถลากเส้นตรงผ่านจุดนั้นและมีความชันตามที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเช่นกัน ความชันของเส้นตรงจะแทนด้วยจำนวนจริง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

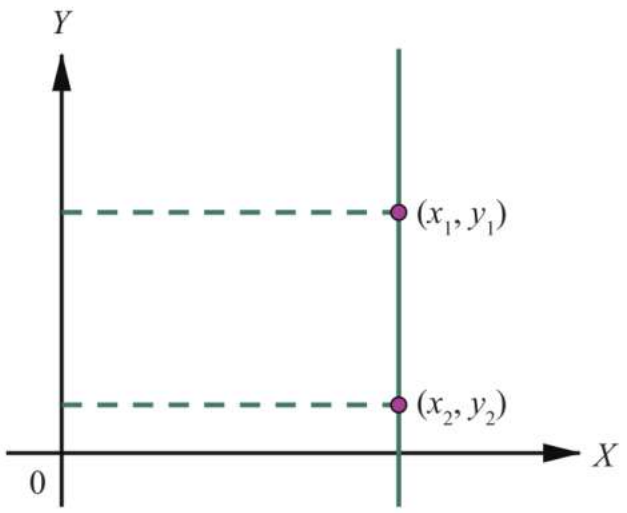
ความชันของเส้นตรง ℓ คือ $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$



รูปที่ 7

ความชัน m อาจเขียนได้เป็น $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ทั้งนี้เพราะ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ถ้า $x_1 = x_2$ แล้วเส้นตรงจะขนานกับแกน Y หรือตั้งฉากกับแกน X (ดังรูปที่ 8) และหาความชันของเส้นตรงนี้ไม่ได้ เนื่องจากไม่นิยามความชันของเส้นตรงเมื่อ $x_1 = x_2$

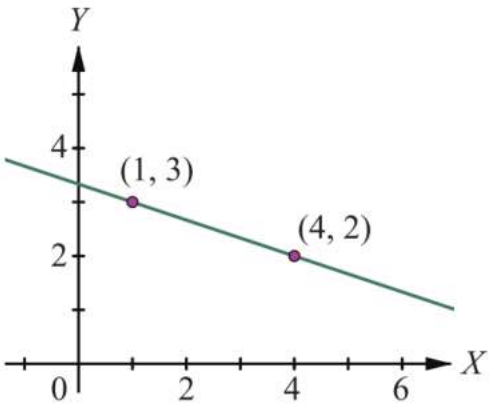


รูปที่ 8

ตัวอย่างที่ 8

จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 3)$ และ $(4, 2)$

วิธีทำ



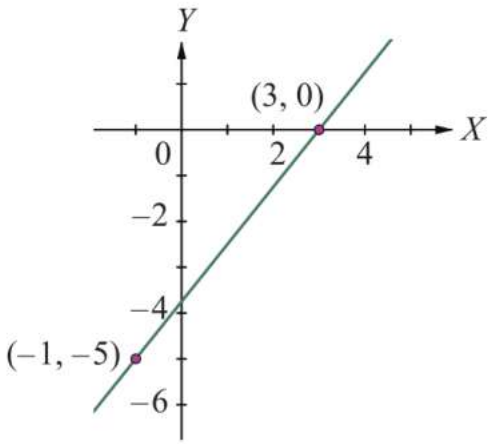
ให้ $(x_1, y_1) = (1, 3)$ และ $(x_2, y_2) = (4, 2)$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3-2}{1-4} = -\frac{1}{3}$ ■

ตัวอย่างที่ 9

จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 0)$ และ $(-1, -5)$

วิธีทำ

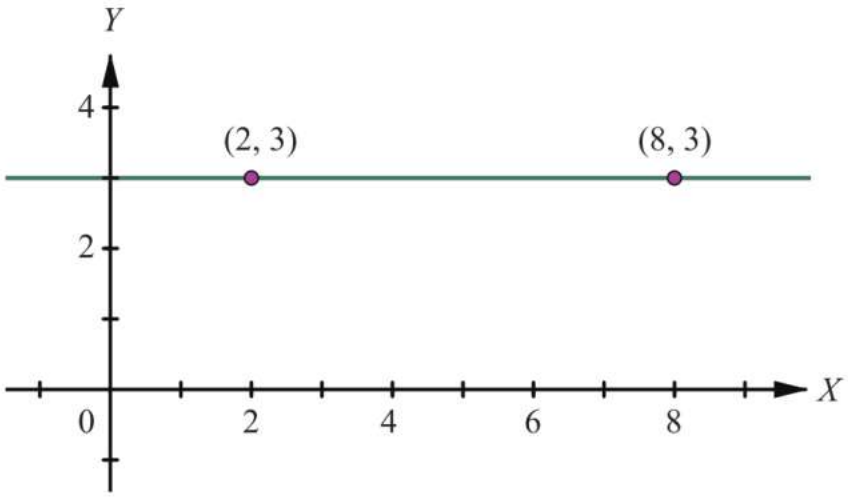


ดังนั้น ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{0-(-5)}{3-(-1)} = \frac{5}{4}$ ■

ตัวอย่างที่ 10

จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และ $(8, 3)$

วิธีทำ



ดังนั้น ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{3-3}{2-8}=0$ ■

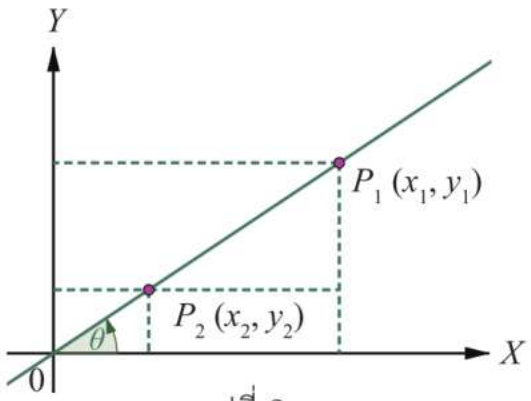
ข้อสังเกต เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) จะขนานกับแกน X เมื่อ $y_1 = y_2$ ดังนั้น เส้นตรงที่ขนานกับแกน X มีความชันเป็นศูนย์

ในกรณีที่เส้นตรงไม่ขนานกับแกน X และแกน Y ความชันของเส้นตรงจะมีค่าดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 เส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน X เมื่อวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ดังรูปที่ 9 จากรูปจะเห็นว่า $x_1 - x_2$ และ $y_1 - y_2$ เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ (หรือถ้าสลับจุด P_1 กับ P_2 จะได้ว่า $x_1 - x_2$ และ $y_1 - y_2$ เป็นจำนวนลบทั้งคู่)

ดังนั้น $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

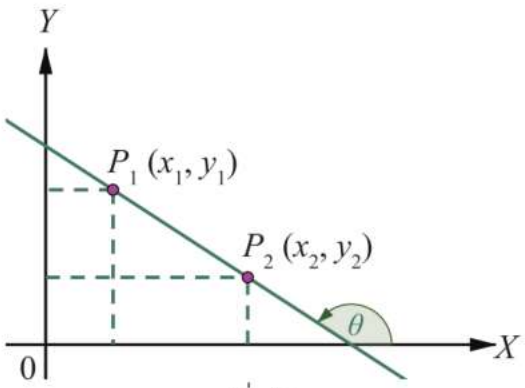
มากกว่าศูนย์เสมอ



รูปที่ 9

กรณีที่ 2 เส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X เมื่อวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ดังรูปที่ 10

จากรูป จะเห็นว่า $x_1 - x_2$ เป็นจำนวนลบ และ $y_1 - y_2$ เป็นจำนวนบวก (หรือถ้าสลับจุด P_1 กับ P_2 จะได้ว่า $x_1 - x_2$ เป็นจำนวนบวก และ $y_1 - y_2$ เป็นจำนวนลบ)



รูปที่ 10

ดังนั้น $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

น้อยกว่าศูนย์

เสริมสมอง : ป้ายทางขึ้นลาดชัน

ป้ายทางขึ้นลาดชันเป็นป้ายจราจรประเภทป้ายเตือน โดยป้ายทางขึ้นลาดชันมีความหมายว่า ทางข้างหน้าเป็นทางลาดชันขึ้นเขา หรือขึ้นเนินสันเขาหรือสันเนิน มีความลาดชันตามตัวเลขที่กำหนดเป็น “ร้อยละ” ตามที่ระบุในป้าย ซึ่งอาจกำบังสายตาให้มองไม่เห็นรถที่สวนมา ควรขับรถให้ช้าลง เดินรถใกล้ขอบทางด้านซ้ายให้มาก และให้ระมัดระวังอันตรายจากรถที่สวนทางมา ทั้งนี้ตัวเลขร้อยละที่ปรากฏในป้ายหาได้จากค่าสัมบูรณ์ของความชันของทางลาดชันคูณด้วย 100 เช่น หากตัวเลขร้อยละที่ปรากฏในป้าย คือ 8 หมายความว่าความชันของทางลาดชันนั้นมีค่าเป็น 0.08 หรือทำมุมประมาณ 4.57 องศากับพื้นราบ

แบบฝึกหัด 3.1.3

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดต่อไปนี้
   1) $(0, 0)$ และ $(2, 6)$
   2) $(0, 0)$ และ $(-2, 6)$
   3) $(5, 3)$ และ $(12, 7)$
   4) $(0, 0)$ และ $(-3, -4)$
   5) $(3, -8)$ และ $(-5, 7)$
   6) $(t+1, s)$ และ $(2t, s-3)$ เมื่อ $t \neq 1$

2. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q มีความชันเท่ากับ m ตามที่กำหนดให้
   1) $P(5, 2)$, $Q(x, 6)$ และ $m = 4$
   2) $P(4, x)$, $Q(-3, 1)$ และ $m = \frac{1}{2}$
   3) $P(6, -3)$, $Q(9, x)$ และ $m = -\frac{2}{3}$
   4) $P(x, 12)$, $Q(5, 12)$ และ $m = 0$
   5) $P(1, x)$, $Q(4, 3)$ และ $m = \frac{4}{3}$
   6) $P(x, 1)$, $Q(2x, 2)$ และ $m = 3$

3. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(a, \frac{a}{b}\right)$ และ $\left(b, \frac{b}{a}\right)$ เมื่อ $a \neq 0, b \neq 0$ และ $a \neq b$

4. จงหาความชันและความยาวของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุด $A(2, 10)$, $B(5, 7)$ และ $C(2, 4)$ เป็นจุดยอด

5. กำหนดให้ $P(-6, 4)$, $Q(1, 4)$, $R(-1, -1)$ และ $S(-8, -1)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม จงหาความชันของส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นซึ่งแบ่งรูปสี่เหลี่ยมนี้ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน

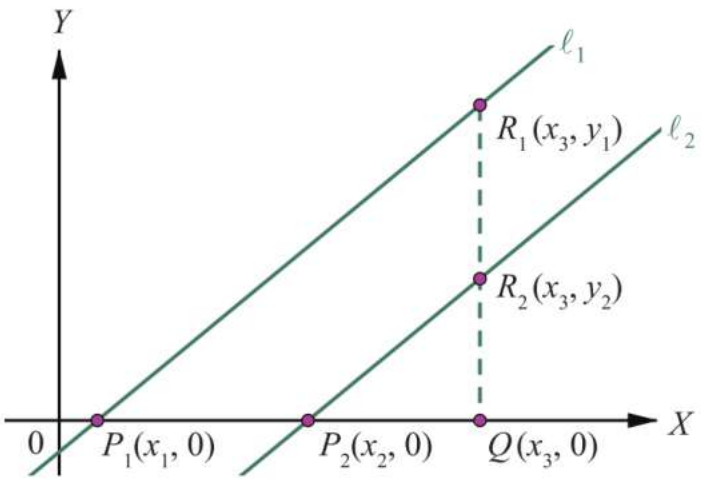
6. กำหนดให้ $A(-6, -2)$, $B(2, -2)$, C และ D เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน AB เป็นฐานที่ยาวเป็น 2 เท่าของด้านคู่ขนาน DC มีมุม A เป็นมุมฉาก และมีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย จงหาความชันที่เป็นไปได้ทั้งหมดของด้าน BC

3.1.4 เส้นขนาน

ให้ ℓ_1 และ ℓ_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน Y และมีความชันเท่ากับ m_1 และ m_2 ตามลำดับ ถ้า ℓ_1 ขนานกับ ℓ_2 แล้วจะได้ $m_1 = m_2$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ℓ_1 ขนานกับแกน X
จะได้ ℓ_2 ขนานกับแกน X
เนื่องจากเส้นตรงที่ขนานกับแกน X มีความชันเท่ากับ 0
ดังนั้น $m_1 = m_2$

กรณีที่ 2 ℓ_1 ไม่ขนานกับแกน X
จะได้ ℓ_2 ไม่ขนานกับแกน X
ให้ ℓ_1 ตัดแกน X ที่จุด $P_1(x_1, 0)$ และ ℓ_2 ตัดแกน X ที่จุด $P_2(x_2, 0)$
ให้ $Q(x_3, 0)$ เป็นจุดบนแกน X ที่ไม่ใช่จุด P_1 และไม่ใช่จุด P_2
จากจุด Q ลากเส้นตั้งฉากกับแกน X ไปตัดเส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ที่จุด $R_1(x_3, y_1)$ และ $R_2(x_3, y_2)$ ตามลำดับ ดังรูป



รูปที่ 11

จากรูป เนื่องจากจุด $R_1(x_3, y_1)$ และ $P_1(x_1, 0)$ อยู่บนเส้นตรง ℓ_1

ดังนั้น $m_1 = \dfrac{y_1 - 0}{x_3 - x_1} = \dfrac{QR_1}{QP_1}$

และเนื่องจากจุด $R_2(x_3, y_2)$ และ $P_2(x_2, 0)$ อยู่บนเส้นตรง ℓ_2

ดังนั้น $m_2 = \frac{y_2 - 0}{x_3 - x_2} = \frac{QR_2}{QP_2}$

พิจารณา ΔP_1QR_1 และ ΔP_2QR_2

เนื่องจาก $\ell_1 // \ell_2$ โดยมีแกน X และ $\overline{QR_1}$ เป็นเส้นตัด

ดังนั้น $\Delta P_1QR_1 \sim \Delta P_2QR_2$

จะได้ $\frac{QR_1}{QR_2} = \frac{QP_1}{QP_2}$

หรือ $\frac{QR_1}{QP_1} = \frac{QR_2}{QP_2}$

ดังนั้น $m_1 = m_2$

จากทั้งสองกรณี จะได้ว่า สำหรับเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y ถ้าเส้นตรงสองเส้นนี้ขนานกัน แล้วความชันย่อมเท่ากัน

ในทางกลับกัน สามารถแสดงให้เห็นได้ว่า ถ้าความชันของเส้นตรงสองเส้นเท่ากัน แล้วเส้นตรงทั้งสองจะขนานกัน

ดังนั้น จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3

เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 11

จงแสดงว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด $A(4, 5)$ และ $B(1, 2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(2, 8)$ และ $D(-2, 4)$

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ $\frac{5-2}{4-1}=1$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D เท่ากับ $\frac{8-4}{2-(-2)}=1$

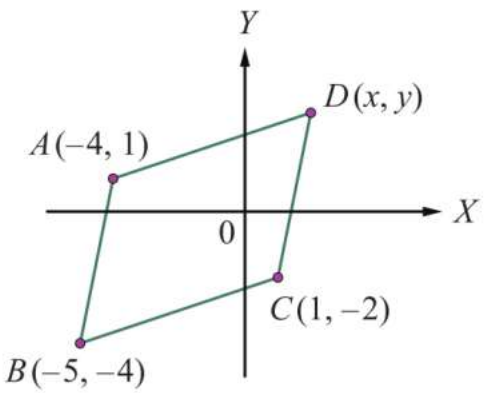
ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D ■

ข้อสังเกต ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีความชันเท่ากันและมีจุดร่วมกัน แล้วเส้นตรงทั้งสองจะเป็นเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 12

จุด $A(-4, 1), B(-5, -4), C(1, -2)$ และ $D(x, y)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ จงหาพิกัดของจุด D

วิธีทำ



จากรูป ด้าน AD ขนานกับด้าน BC

จะได้ว่า ความชันของด้าน AD เท่ากับความชันของด้าน BC

ความชันของด้าน AD เท่ากับ $\frac{1-y}{-4-x}=\frac{y-1}{x+4}$

ความชันของด้าน BC เท่ากับ $\frac{-4-(-2)}{-5-1}=\frac{1}{3}$

ดังนั้น $\frac{y-1}{x+4} = \frac{1}{3}$

หรือ $x-3y = -7$

ในทำนองเดียวกัน ความชันของด้าน AB และความชันของด้าน CD จะต้องเท่ากัน

ดังนั้น $\frac{-2-y}{1-x}=\frac{5}{1}$ หรือ $5x-y=7$

จากการแก้ระบบสมการ $x-3y=-7$ และ $5x-y=7$ จะได้ $x=2$ และ $y=3$

ดังนั้น พิกัดของจุด D คือ $(2,3)$ ■

แบบฝึกหัด 3.1.4

1. จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,-4)$ และ $(3,3)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-2)$ และ $(6,5)$

2. ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด $(k,7)$ และ $(-3,-2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$ และ $(1,-4)$ จงหาค่าของ k

3. จงแสดงว่า $(-2,-1),(1,0),(4,3)$ และ $(1,2)$ เป็นพิกัดของจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

4. จุด $(1,2),(6,7)$ และ $(-3,4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

5. จงหาค่า b ที่ทำให้จุด $(b,6),(-1,4)$ และ $(-4,2)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

6. ให้ p,q และ r เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน จงแสดงว่าจุด $(p,q+r),(q,r+p)$ และ $(r,p+q)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

7. จงแสดงว่าจุด $A(-6,6),B(6,6),C(12,0)$ และ $D(6,-6)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

8. กำหนดให้ $P(-3,2),Q(1,6),R(5,4)$ และ $S(3,0)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ จงแสดงว่าจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

9. จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านที่ไม่ใช่ด้านคู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จะขนานกับด้านคู่ขนาน

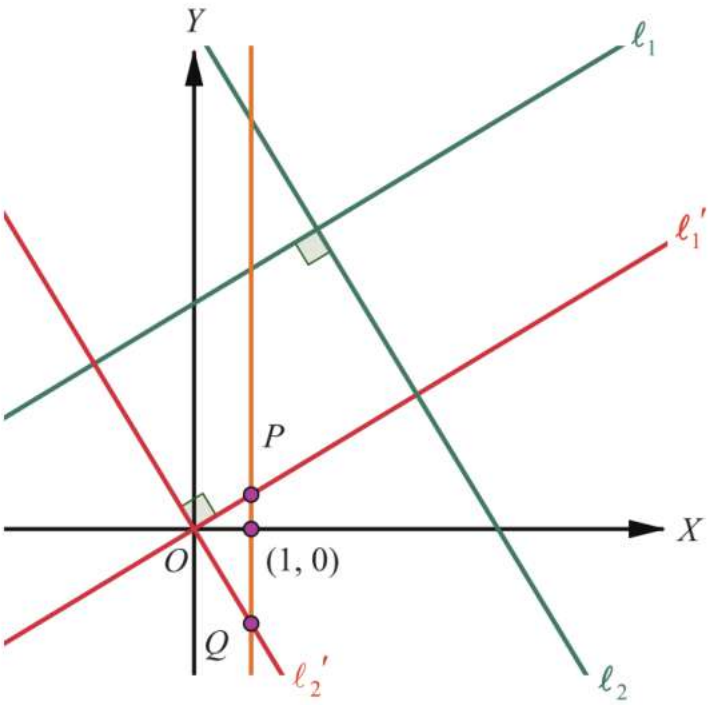
10. จงแสดงว่าจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

3.1.5 เส้นตั้งฉาก

ให้ ℓ_1 และ ℓ_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน Y มีความชันเท่ากับ m_1 และ m_2 ตามลำดับ ถ้า ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ_2 แล้ว จะได้ $m_1m_2 = -1$

ให้ ℓ_1' และ ℓ_2' เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และขนานกับ ℓ_1 และ ℓ_2 ตามลำดับ จะได้ความชันของ ℓ_1' เท่ากับ m_1 และความชันของ ℓ_2' เท่ากับ m_2

ลากเส้นตรงให้ผ่านจุด $(1, 0)$ และตั้งฉากกับแกน X โดยตัดเส้นตรง ℓ_1' และ ℓ_2' ที่จุด P และจุด Q ตามลำดับ ดังรูป



รูปที่ 12

จากรูป ให้จุด P มีพิกัดเป็น $(1, k)$

เนื่องจากเส้นตรง ℓ_1' ผ่านจุด $(0, 0)$ และ $(1, k)$

จะได้ ℓ_1' มีความชันเท่ากับ $\frac{k-0}{1-0} = k$ นั่นคือ $m_1 = k$

ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ $(1, m_1)$

ในทำนองเดียวกัน จะแสดงได้ว่าพิกัดของจุด Q คือ $(1, m_2)$

เนื่องจาก ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ_2 และจากการสร้าง ℓ_1' และ ℓ_2' ทำให้รูปสามเหลี่ยม POQ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

$$\left(\sqrt{(1-1)^2+(m_1-m_2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(0-1)^2+(0-m_1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(0-1)^2+(0-m_2)^2}\right)^2$$

$$(m_1-m_2)^2 = 1^2 + m_1^2 + 1^2 + m_2^2$$

$$m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2$$

$$-2m_1m_2 = 2$$

$$m_1m_2 = -1$$

แสดงว่าผลคูณของความชันของเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y และตั้งฉากกันเท่ากับ -1

ในทางกลับกัน สามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีผลคูณของความชันเท่ากับ -1 แล้ว เส้นตรงทั้งสองจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้น จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4

เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

ตัวอย่างที่ 13

จงแสดงว่าจุด $A(-4,3), B(-1,2)$ และ $C(2,11)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีทำ ความชันของด้าน AB คือ $\frac{3-2}{-4-(-1)} = -\frac{1}{3}$

ความชันของด้าน AC คือ $\frac{3-11}{-4-2} = \frac{4}{3}$

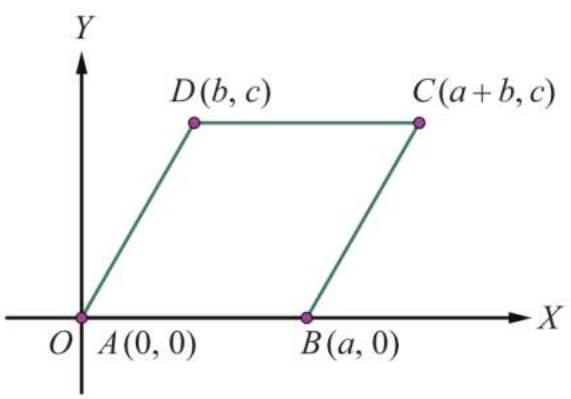
ความชันของด้าน BC คือ $\frac{2-11}{-1-2} = 3$

จะเห็นว่า ผลคูณของความชันของด้าน AB และด้าน BC เท่ากับ -1
นั่นคือ ด้าน AB ตั้งฉากกับด้าน BC
ดังนั้น จุดทั้งสามเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ■

ตัวอย่างที่ 14

จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน

วิธีทำ พิจารณารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน $ABCD$
ให้จุด A มีพิกัดเป็น $(0,0)$ จุด B อยู่บนแกน X มีพิกัดเป็น $(a,0)$ และ จุด D มีพิกัดเป็น (b,c)



เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านยาวเท่ากันทุกด้าน
ดังนั้น จุด C ต้องมีพิกัดเป็น $(a+b, c)$ และ $AB = AD$

จะได้ $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2+c^2}$

ดังนั้น $a^2 = b^2+c^2$

ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นทแยงมุม AC และ BD ตามลำดับ

จะได้ $m_1 = \frac{c}{a+b}$

$m_2 = \frac{c}{b-a}$

ดังนั้น $m_1m_2 = \frac{c}{a+b}\cdot\frac{c}{b-a} = \frac{c^2}{b^2-a^2} = \frac{c^2}{-c^2} = -1$

นั่นคือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน ■

แบบฝึกหัด 3.1.5

1. ให้เส้นตรง ℓ มีความชันเท่ากับ $\frac{3}{4}$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ จะมีความชันเท่าใด

2. ให้เส้นตรง ℓ มีความชันเท่ากับ $\frac{k}{m}$ โดยที่ $m \neq 0$ จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ

3. จงหาความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 4)$ และ $(-3, -5)$

4. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, 3)$ และ $(-3, -5)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, -3)$ และ $(-8, 2)$ หรือไม่

5. ถ้าจุด P มีพิกัดเป็น (a, b) และจุด Q มีพิกัดเป็น $(-b, a)$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรง OP ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง OQ เมื่อจุด O เป็นจุดกำเนิด

6. จุด $(1, 6), (8, 8)$ และ $(-7, 2)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

7. ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด $(k, 7)$ และ $(-3, -2)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 2)$ และ $(1, -4)$ จงหาค่าของ k

8. จุด $(2, 5), (2, 9), (6, 9)$ และ $(6, 5)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมนี้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

9. จงแสดงว่าจุด $(2, 1), (6, 4), (3, 8)$ และ $(-1, 5)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

10. กำหนดจุด $A(-5, 4), B(4, 9), C(9, 0)$ และ $D(0, -5)$ จงพิจารณาว่า
    1) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าหรือไม่
    2) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือไม่

11. กำหนดจุด $A(6, 8), B(5, 4), C(3, 6)$ และ $D(4, 10)$ จงพิจารณาว่า
    1) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือไม่
    2) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

12. จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตั้งฉากซึ่งกันและกัน

3.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

จากที่ได้กล่าวมาแล้วในเรื่องกราฟของความสัมพันธ์ว่า เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนจริง กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบที่แสดงคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

พิจารณาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงดังต่อไปนี้

(1) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ดังนั้น เส้นตรง ℓ ย่อมตั้งฉากกับแกน Y ให้เส้นตรง ℓ ตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$

ถ้า b เป็นจำนวนจริงบวก เส้นตรง ℓ จะอยู่เหนือแกน X และห่างจากแกน X เป็นระยะ b หน่วย

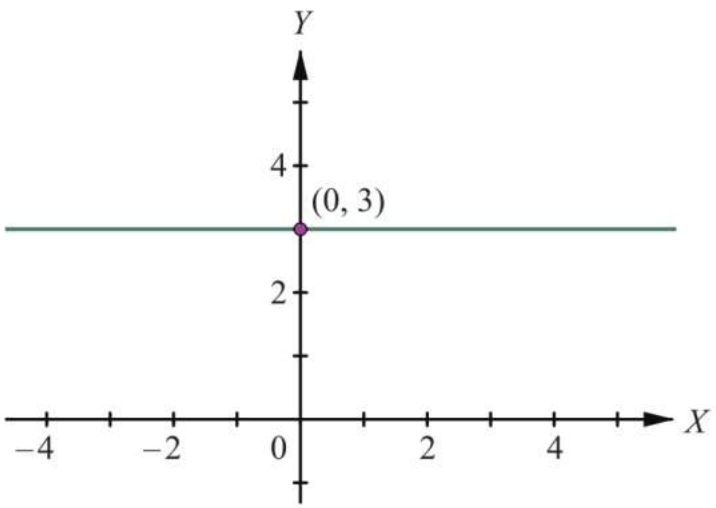
ถ้า $b = 0$ เส้นตรง ℓ จะทับแกน X

ถ้า b เป็นจำนวนจริงลบ เส้นตรง ℓ จะอยู่ใต้แกน X และห่างจากแกน X เป็นระยะ $|b|$ หน่วย

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X คือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = b\} \quad \text{เมื่อ } b \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

เช่น



จากรูป เส้นตรงที่ขนานกับแกน X และอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ 3 หน่วย เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3\}$

(2) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ดังนั้น เส้นตรง ℓ ย่อมตั้งฉากกับแกน X ให้เส้นตรง ℓ ตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก เส้นตรง ℓ จะอยู่ทางขวาของแกน Y และห่างจากแกน Y เป็นระยะ a หน่วย

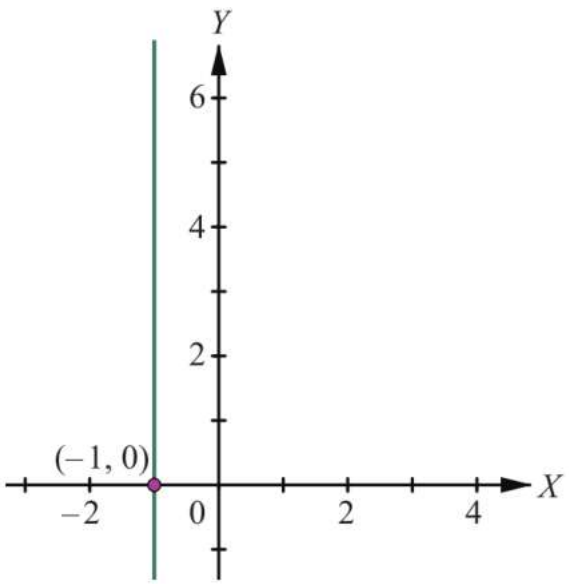
ถ้า $a = 0$ เส้นตรง ℓ จะทับแกน Y

ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ เส้นตรง ℓ จะอยู่ทางซ้ายของแกน Y และห่างจากแกน Y เป็นระยะ $|a|$ หน่วย

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y คือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = a\} \text{ เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

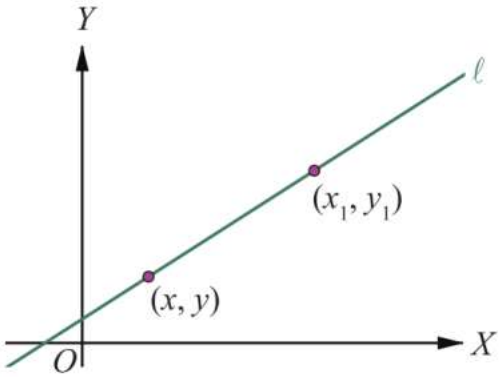
เช่น



จากรูป เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และอยู่ทางซ้ายของแกน Y เป็นระยะ 1 หน่วย เป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -1\}$

(3) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1)

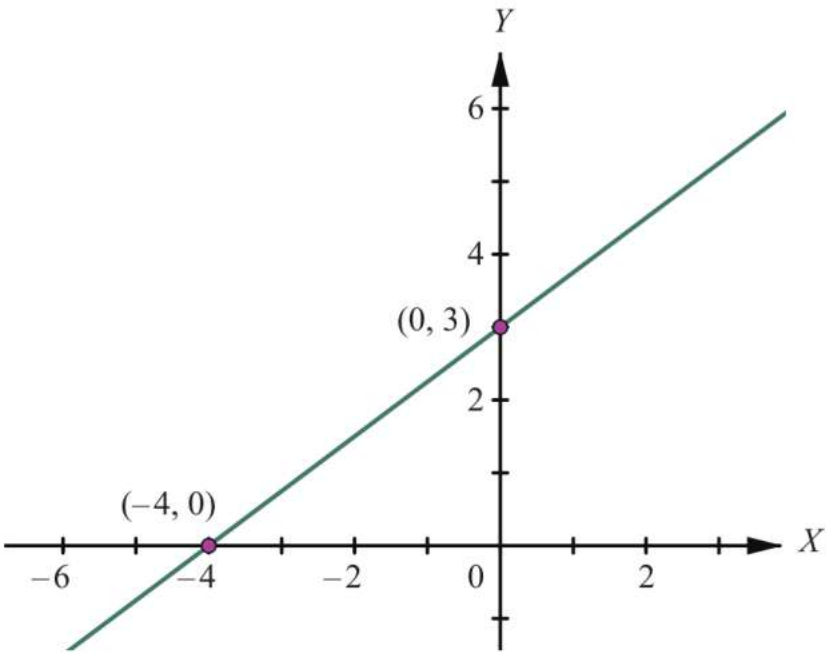


ถ้า (x, y) เป็นจุดอื่น ๆ บนเส้นตรง ℓ จะได้ $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ

$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$

เช่น



จากรูป เส้นตรงที่มีความชัน $\dfrac{3}{4}$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0, 3)$ เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 3 = \dfrac{3}{4}(x - 0)\right\}$ หรือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4y = 3x + 12\}$

ตัวอย่างที่ 15

จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(-1, 0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0, 8)$

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $\frac{8-0}{0-(-1)} = 8$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ที่ต้องการ คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 0 = 8(x+1)\}$

หรือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 8x + 8\}$ ■

การเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงนั้น บางครั้งอาจเขียนสั้น ๆ เฉพาะสมการที่เป็นเงื่อนไขซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y โดยจะเรียกสมการนั้นว่า **สมการเส้นตรง**

ดังนั้น จากความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$ ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) อาจเขียนสั้น ๆ ในรูปของสมการเส้นตรงได้เป็น $y - y_1 = m(x - x_1)$

จาก $y - y_1 = m(x - x_1)$ จะได้ $y = mx - mx_1 + y_1$
เนื่องจาก m, x_1 และ y_1 ต่างก็เป็นค่าคงตัว ถ้าให้ $c = -mx_1 + y_1$ จะเขียนสมการได้เป็น

$$y = mx + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ถ้าแทน x ด้วย 0 จะได้ $y = c$ แสดงว่าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(0, c)$ ซึ่งเป็นจุดที่อยู่บนแกน Y ดังนั้น สมการ $y = mx + c$ จึงมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และตัดแกน Y ที่จุด $(0, c)$

ต่อไปจะเขียนสมการเส้นตรงที่เป็นเงื่อนไขของความสัมพันธ์แทนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

จากที่ได้กล่าวมาแล้ว สรุปได้ว่า

- เส้นตรงที่ขนานกับแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ มีสมการเป็น $y = b$
- เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ มีสมการเป็น $x = a$
- เส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X และแกน Y และมีความชัน m มีสมการเป็น $y = mx + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะเห็นว่าสมการทั้งสามรูปแบบ แต่ละแบบจะเป็นกรณีหนึ่งของสมการ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

นั่นคือ เส้นตรงทุกเส้นในระบบพิกัดฉากจะมีสมการอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ในทางกลับกัน จะแสดงได้ว่ากราฟของสมการในรูปดังกล่าวเป็นเส้นตรง
เมื่อพิจารณาสมการ $Ax + By + C = 0$ จะเห็นว่ามีกรณีที่เป็นไปได้ดังนี้

1) เมื่อ $A = 0$ และ $B \neq 0$

จาก $Ax + By + C = 0$ จะได้ $y = -\frac{C}{B}$

ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$

2) เมื่อ $A \neq 0$ และ $B = 0$

จาก $Ax + By + C = 0$ จะได้ $x = -\frac{C}{A}$

ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และตัดแกน X ที่จุด $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$

3) เมื่อ $A \neq 0$ และ $B \neq 0$

จาก $Ax + By + C = 0$ จะได้ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{A}{B}$ และตัดแกน Y ที่จุด $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$

นั่นคือ กราฟของสมการ $Ax+By+C=0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันจะเป็นเส้นตรง และเรียกสมการในรูปนี้ว่า **รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง**

ตัวอย่างที่ 16

จงหาความชันของเส้นตรงที่มีสมการ $2x-3y=4$ และจุดที่เส้นตรงนี้ตัดแกน X และแกน Y

วิธีทำ หาความชันของเส้นตรงโดยเขียนสมการให้อยู่ในรูป $y=mx+c$

$$\begin{aligned} 3y &= 2x-4 \\ y &= \frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงเส้นนี้ คือ $\frac{2}{3}$

การหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน X และแกน Y ทำได้ดังนี้

1) จุด (x, y) เป็นจุดที่กราฟตัดแกน X ก็ต่อเมื่อ $y=0$
จากสมการ $2x-3y=4$ จะได้ว่า $y=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=2$
ดังนั้น จุดที่เส้นตรงตัดแกน X คือ จุด $(2, 0)$

2) จุด (x, y) เป็นจุดที่กราฟตัดแกน Y ก็ต่อเมื่อ $x=0$
จากสมการ $2x-3y=4$ จะได้ว่า $x=0$ ก็ต่อเมื่อ $y=-\frac{4}{3}$
ดังนั้น จุดที่เส้นตรงตัดแกน Y คือ จุด $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ■

หมายเหตุ ถ้าเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ จะเรียก a ว่า **ระยะตัดแกน X (x-intercept)** และถ้าเส้นตรงตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ จะเรียก b ว่า **ระยะตัดแกน Y (y-intercept)** จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(2, 0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ดังนั้น ระยะตัดแกน X เป็น 2 และระยะตัดแกน Y เป็น $-\frac{4}{3}$

ถ้าสมการเส้นตรงอยู่ในรูป $y = mx + c$ จะได้ว่า ความชันของเส้นตรง คือ m และระยะตัดแกน Y คือ c

ตัวอย่างที่ 17

จงหาความชันของเส้นตรงที่มีสมการเป็น $x + 2y = 1$ และจุดที่เส้นตรงตัดแกน Y

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ ได้เป็น $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $-\frac{1}{2}$ และจุดที่เส้นตรงตัดแกน Y คือ จุด $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ■

หมายเหตุ ต่อไปนี้เมื่อกล่าวสั้น ๆ ว่าเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ จะหมายถึงเส้นตรงที่เป็นกราฟของสมการ $Ax + By + C = 0$

ตัวอย่างที่ 18

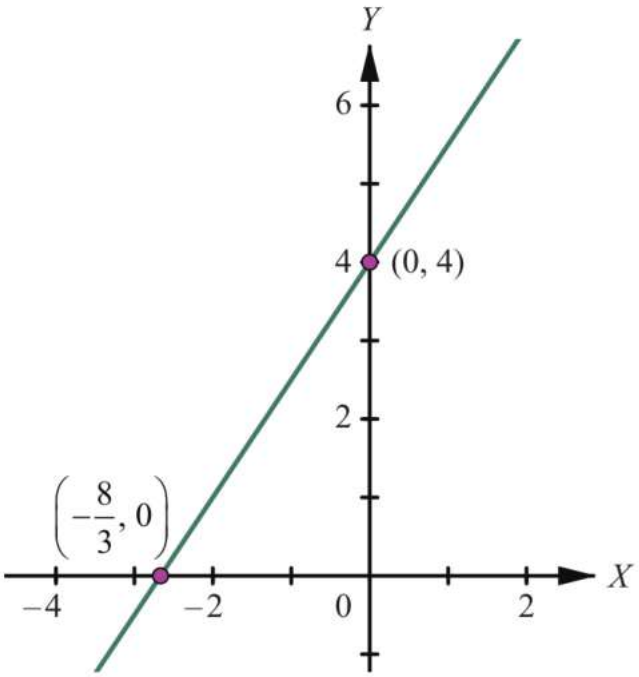
จงเขียนกราฟของเส้นตรง $2y-3x=8$

วิธีทำ การเขียนเส้นตรงวิธีหนึ่งทำได้โดยหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน X และแกน Y

จุดที่เส้นตรง $2y-3x=8$ ตัดแกน X คือ จุด $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$

จุดที่เส้นตรง $2y-3x=8$ ตัดแกน Y คือ จุด $(0, 4)$

เขียนจุดทั้งสองในระนาบ แล้วลากเส้นตรงผ่านจุดทั้งสองจะได้กราฟที่ต้องการ



แบบฝึกหัด 3.1.6

1. ให้ $t=\{(x, y) \mid x-2y=4\}$ จงพิจารณาว่าคู่อันดับต่อไปนี้เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t หรือไม่

   1) $(1, 0)$ 2) $(-8, 6)$ 3) $(0, -2)$

   4) $(2, -1)$ 5) $\left(6\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

2. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1) ขนานกับแกน X และอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ $\frac{3}{7}$ หน่วย

   2) ขนานกับแกน Y และอยู่ทางซ้ายแกน Y เป็นระยะ $\frac{2}{3}$ หน่วย

   3) ขนานกับแกน X และอยู่ห่างจากจุด $(0, 3)$ เป็นระยะ 4 หน่วย

   4) ขนานกับแกน Y และอยู่ห่างจากจุด $(-2, 0)$ เป็นระยะ 5 หน่วย

3. จงบอกความชัน ระยะตัดแกน X (x-intercept) และระยะตัดแกน Y (y-intercept) ของกราฟของแต่ละสมการต่อไปนี้

สมการ	ความชัน	ระยะตัดแกน X	ระยะตัดแกน Y
1) $2x-3y=7$			
2) $5x+4y-2=0$			
3) $x-4y+5=0$			
4) $3x+2y+7=0$			
5) $5x-y-11=0$			

สมการ	ความชัน	ระยะตัดแกน X	ระยะตัดแกน Y
6) $\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y=24$			
7) $x-y=0$			
8) $2y+3=0$			
9) $x=4$			
10) $3(y-1)=-2(x-2)$			

4. จงแสดงว่าเส้นตรง $3y=2x-6$ ขนานกับเส้นตรง $y=\frac{2}{3}x+1$

5. จงแสดงว่าเส้นตรง $2x+y=8$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $y=\frac{1}{2}x-5$

6. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7, 5)$ และขนานกับเส้นตรง $x+2y+12=0$

7. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,\ 2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x-2y+12=0$

8. จงเขียนกราฟของเส้นตรง $2x-3y+1=0$ และ $x+y-2=0$ และหาพิกัดของจุดตัดของกราฟทั้งสอง

9. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่
   1) ผ่านจุด $(-1, 0)$ และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2)$ และ $(-3, 4)$
   2) ผ่านจุด $(-1, -4)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 3)$ และ $(-2, -2)$
   3) จุดทุกจุดบนเส้นตรงอยู่ห่างจากจุด $(6, 0)$ และ $(2, 0)$ เป็นระยะเท่ากัน

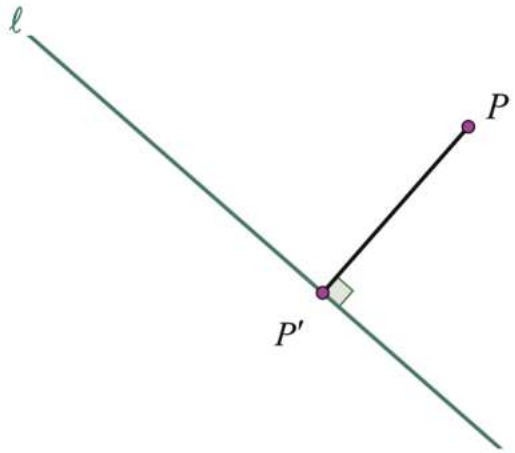
10. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x-7y-11=0$ และผ่านจุดที่เส้นตรง $x-7y-11=0$ ตัดกับเส้นตรง $3x+5y-7=0$

11. ให้ $(0,0),(4,0)$ และ (x,y) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 4 ตารางหน่วย จงหาว่า (x,y) เป็นคู่อันดับใดได้บ้าง

12. จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง $5x-3y+17=0, 3x+5y-6=0,$ $5x-3y-8=0$ และ $3x+5y+4=0$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

13. จงแสดงว่าเส้นตรง $ax+by=d_1$ และเส้นตรง $ax+by=d_2$ ขนานกัน โดยที่ $b\neq 0$

3.1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด



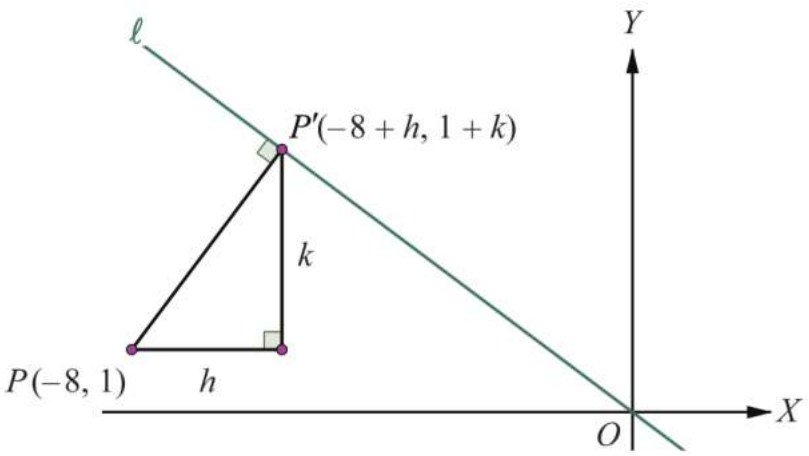
รูปที่ 13

ให้ P เป็นจุดใด ๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นตรง ℓ และ P' เป็นจุดบนเส้นตรง ℓ ที่ $\overline{PP'}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ ดังรูปที่ 13 PP' จะเป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ กับจุด P ถ้ากำหนดสมการของเส้นตรง ℓ และพิกัดของจุด P จะสามารถหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ กับจุด P ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 19

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่มีสมการ $3x+4y=0$ จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ กับจุด $P(-8,1)$

วิธีทำ



ให้ P' เป็นจุดบน ℓ ที่ $\overline{PP'}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ

PP' จะเป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ กับจุด P

ให้ P' มีพิกัดเป็น $(-8+h, 1+k)$ เมื่อ h และ k เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $PP' = \sqrt{h^2+k^2}$

จากสมการ $3x+4y=0$ ความชันของเส้นตรง ℓ คือ $-\frac{3}{4}$

ความชันของเส้นตรง PP' คือ $\frac{1-(1+k)}{-8-(-8+h)} = \frac{k}{h}$

เนื่องจากเส้นตรง PP' ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ ดังนั้น ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองต้องเท่ากับ -1

นั่นคือ $\quad -\frac{3}{4}\cdot\frac{k}{h} = -1$

หรือ $\quad 4h-3k=0 \qquad \text{-------}(1)$

เนื่องจาก $P'(-8+h, 1+k)$ เป็นจุดบนเส้นตรง ℓ ดังนั้น เมื่อแทน x ด้วย $-8+h$ และแทน y ด้วย $1+k$ ในสมการของเส้นตรง ℓ จะได้

$$3(-8+h)+4(1+k) = 0$$
$$3h+4k = 20 \qquad \text{-------}(2)$$

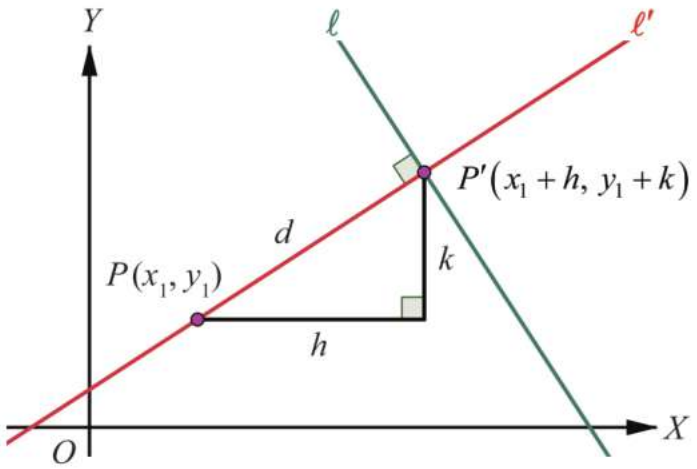
จาก (1) และ (2) จะได้ $h=\frac{12}{5},\ k=\frac{16}{5}$

ดังนั้น $h^2+k^2=\frac{144}{25}+\frac{256}{25}=16$

จะได้ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ กับจุด P คือ $PP'=\sqrt{h^2+k^2}=4$ หน่วย

■

ในกรณีทั่วไป ถ้า ℓ เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $Ax+By+C=0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดที่อยู่ภายนอกเส้นตรง ℓ และ d เป็นระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ กับจุด P แล้วจะได้ $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้



ให้ $P'(x_1+h, y_1+k)$ เป็นจุดบน ℓ ที่ $\overline{PP'}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ

จากสมการของเส้นตรง ℓ ความชันของเส้นตรง ℓ คือ $-\frac{A}{B}$

ความชันของเส้นตรง ℓ' ซึ่งผ่านจุด $P(x_1, y_1)$ และจุด $P'(x_1+h, y_1+k)$ คือ $\frac{k}{h}$

เนื่องจากเส้นตรง ℓ' ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ ดังนั้น ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองต้องเท่ากับ -1

นั่นคือ $\left(-\frac{A}{B}\right)\cdot\left(\frac{k}{h}\right) = -1$

หรือ $Bh - Ak = 0$ ------- (1)

เนื่องจาก $P'(x_1 + h, y_1 + k)$ เป็นจุดบนเส้นตรง ℓ ดังนั้น เมื่อแทน x ด้วย $x_1 + h$ และแทน y ด้วย $y_1 + k$ ในสมการของเส้นตรง ℓ จะได้

$$A(x_1 + h) + B(y_1 + k) + C = 0 \quad \text{------- (2)}$$

จากสมการ (1) จะได้

$$(Bh - Ak)^2 = 0$$

$$B^2h^2 - 2ABhk + A^2k^2 = 0 \quad \text{------- (3)}$$

จากสมการ (2) จะได้

$$Ah + Bk = -(Ax_1 + By_1 + C)$$

$$(Ah + Bk)^2 = (-(Ax_1 + By_1 + C))^2$$

$$A^2h^2 + 2ABhk + B^2k^2 = (Ax_1 + By_1 + C)^2 \quad \text{------- (4)}$$

จากสมการ (3) และ (4) จะได้

$$(A^2 + B^2)h^2 + (A^2 + B^2)k^2 = (Ax_1 + By_1 + C)^2$$

$$h^2 + k^2 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}$$

แต่ $d = PP' = \sqrt{h^2 + k^2}$

จะได้ $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ดังนั้น จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax+By+C=0$ กับจุด (x_1, y_1) เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัวที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือ $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ตัวอย่างที่ 20

จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x+4y=10$ กับจุดต่อไปนี้

1) จุด $(0, 0)$

2) จุด $(-2, -1)$

วิธีทำ จาก $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ในที่นี้ $A=3, B=4$ และ $C=-10$

1) $x_1=0, y_1=0$ โดยการแทนค่าจะได้

$$d=\frac{|(3)(0)+(4)(0)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x+4y=10$ กับจุด $(0, 0)$ เท่ากับ 2 หน่วย

2) $x_1=-2, y_1=-1$ โดยการแทนค่าจะได้

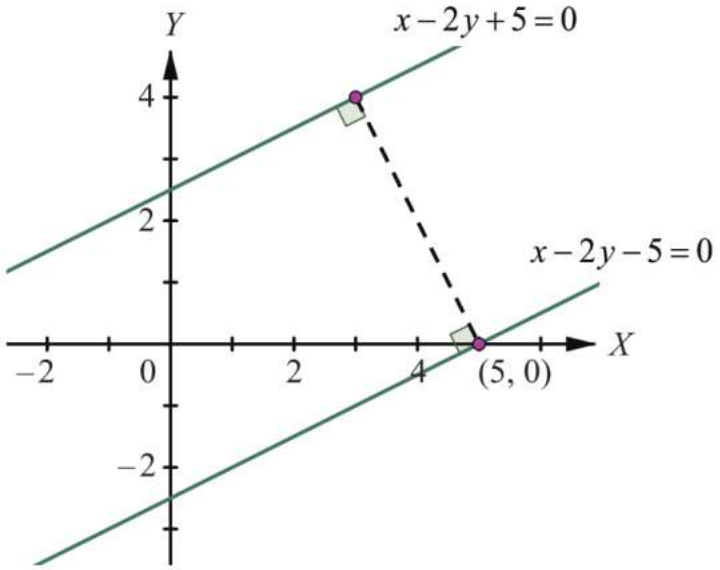
$$d=\frac{|(3)(-2)+(4)(-1)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x+4y=10$ กับจุด $(-2, -1)$ เท่ากับ 4 หน่วย ■

ตัวอย่างที่ 21

จงหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน $x-2y+5=0$ กับ $x-2y-5=0$

วิธีทำ เลือกจุดบนเส้นตรง $x-2y-5=0$ มาหนึ่งจุด เช่น จุด $(5,0)$ แล้วหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง $x-2y+5=0$ กับจุด $(5,0)$



จาก $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

จะได้ $$d = \frac{|5 + (-2)(0) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานนี้เท่ากับ $2\sqrt{5}$ หน่วย ■

ข้อสังเกต ถ้าต้องการหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ_1 ซึ่งขนานกับเส้นตรง ℓ_2 ทำได้โดยการเลือกจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรง ℓ_1 และหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ_2 กับจุดนั้น (หรือเลือกจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรง ℓ_2 แล้วหาระยะห่างระหว่างเส้นตรง ℓ_1 กับจุดนั้น) หรืออาจหาโดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax+By+C_1=0$ และเส้นตรง $Ax+By+C_2=0$ เมื่อ A, B, C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือ

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

พิสูจน์ จากสมการเส้นตรง $Ax+By+C_1=0$ และเส้นตรง $Ax+By+C_2=0$ จะเห็นว่าเส้นตรงทั้งสองขนานกัน

เลือกจุดจุดหนึ่งบนเส้นตรง $Ax+By+C_2=0$ ให้เป็น (x_1, y_1)

จะได้ $Ax_1+By_1=-C_2$

ให้ d เป็นระยะห่างระหว่างจุด (x_1, y_1) กับเส้นตรง $Ax+By+C_1=0$

จะได้ $$d = \frac{|Ax_1+By_1+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

แต่ $$Ax_1+By_1 = -C_2$$

จะได้ $$d = \frac{|-C_2+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$d = \frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

นั่นคือ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax+By+C_1=0$ และเส้นตรง $Ax+By+C_2=0$ เท่ากับ $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ หน่วย ■

จากตัวอย่างที่ 21 สามารถหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน $x-2y+5=0$ กับ $x-2y-5=0$ โดยใช้ทฤษฎีบทข้างต้น ดังนี้

จาก $$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|5-(-5)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานนี้เท่ากับ $2\sqrt{5}$ หน่วย

แบบฝึกหัด 3.1.7

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) $6x-8y+4=0, \quad (2,-3)$
   2) $4x+3y-8=0, \quad (0,\ 6)$
   3) $2x+3y=13, \quad (0,\ 0)$
   4) $y-4=\frac{7}{5}(x-3), \quad (8,\ 11)$
   5) $y=1, \quad (-1,1)$

2. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้
   1) $3x+4y-7=0, \quad 3x+4y+3=0$
   2) $3x-4y-7=0, \quad 6x-8y+16=0$
   3) $5x+12y-15=0, \quad 10x+24y+9=0$
   4) $x-y-3=0, \quad 3x-3y+7=0$
   5) $3x+y+5=0, \quad 7-3x-y=0$

3. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x-4y-5=0$ และอยู่ห่างจากเส้นตรงนี้ 1 หน่วย

4. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $4x-3y+26=0$ และอยู่ห่างจากจุด $(8,8)$ เป็นระยะ 2 หน่วย

5. จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $12y=5x-7$ และอยู่ห่างจากจุด $(-1,2)$ เป็นระยะ 3 หน่วย

6. ถ้าเส้นตรง $12x-5y-10=0$ เป็นเส้นตรงที่อยู่กึ่งกลางระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง ซึ่งอยู่ห่างกัน 8 หน่วยแล้ว จงหาสมการของเส้นขนานคู่นี้

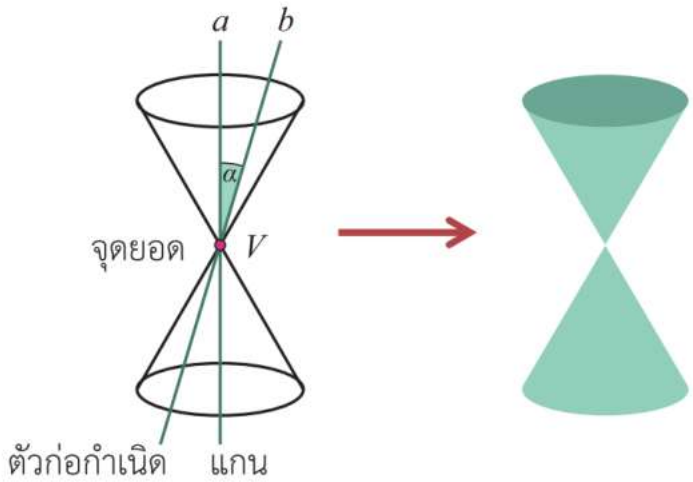
3.2 ภาคตัดกรวย

การศึกษาเกี่ยวกับ**ภาคตัดกรวย (conic sections)** เริ่มต้นนานมาแล้ว อะพอลโลเนียสแห่งเพอร์กา (Apollonius of Perga) ซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วง 262 – 190 ปีก่อนคริสต์ศักราช เป็นผู้หนึ่งที่ศึกษาภาคตัดกรวยและค้นพบสมบัติบางประการที่น่าสนใจของภาคตัดกรวย เขาเขียนตำราเกี่ยวกับภาคตัดกรวยไว้ถึง 8 เล่ม ต่อมาภายหลังพบว่า ภาคตัดกรวยไม่เพียงแต่เป็นเส้นโค้งที่สวยงาม แต่ยังสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลายด้าน เช่น การจำลองวิถีของวัตถุภายใต้แรงโน้มถ่วง การอธิบายวงโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ การผลิตกล้องโทรทรรศน์ชนิดสะท้อนแสง การออกแบบจานรับส่งสัญญาณในระบบโทรคมนาคม การระบุตำแหน่งของเรือในทะเล การออกแบบอุปกรณ์ทางการแพทย์ที่อาศัยการสะท้อนของคลื่น

การศึกษาภาคตัดกรวยสามารถศึกษาได้หลายแนวทาง ในที่นี้จะศึกษาภาคตัดกรวยโดยใช้วิธีการทางเรขาคณิตวิเคราะห์

กรวยเป็นรูปเรขาคณิตที่มีวิธีสร้างในเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

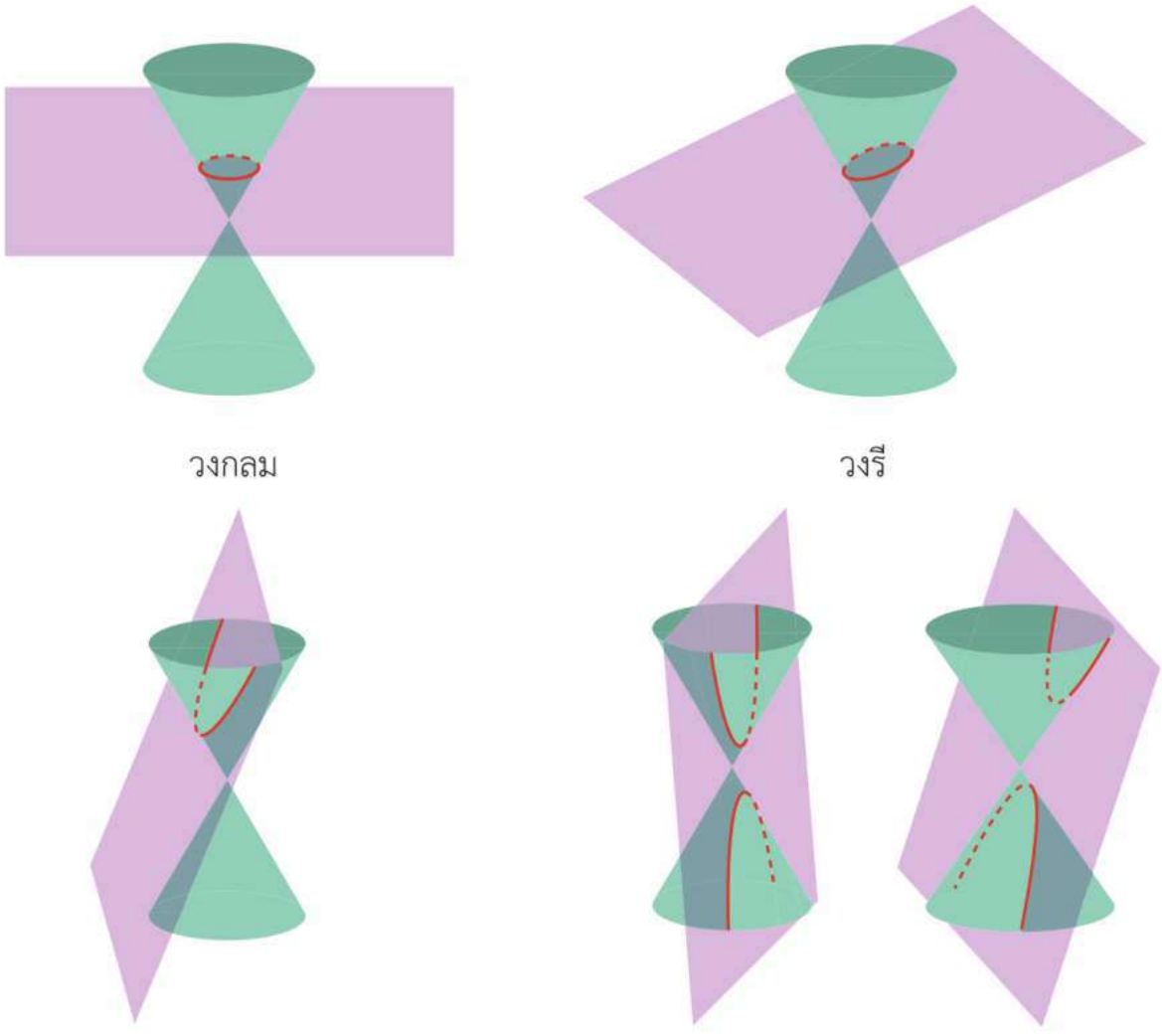
ให้ a และ b เป็นเส้นตรงใด ๆ สองเส้นซึ่งตัดกันที่จุด V เป็นมุมแหลม α
ให้เส้นตรง a และจุด V ตรึงอยู่กับที่
ผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นตรง b รอบเส้นตรง a (โดยมุม α ระหว่างเส้นตรง a และ b มีขนาดคงตัว) เรียกว่า **กรวยกลมตรง (right circular cone)**



ในที่นี้จะศึกษาเฉพาะกรวยกลมตรงเท่านั้นและจะเรียกสั้น ๆ ว่า **กรวย** เส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า **แกน (axis)** ของกรวย จุด V เรียกว่า **จุดยอด (vertex)**

เส้นตรง b ที่ผ่านจุด V และทำมุม α กับแกนของกรวย เรียกว่า **ตัวก่อกำเนิด (generator)** ของกรวย จุดยอด V แบ่งกรวยออกเป็นสอง**ข้าง (nappe)** ซึ่งอยู่คนละด้านของจุดยอด

ภาคตัดกรวย คือ รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ภาคตัดกรวยที่จะศึกษากันเกิดจากระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวย ดังรูป



รูปที่ 14

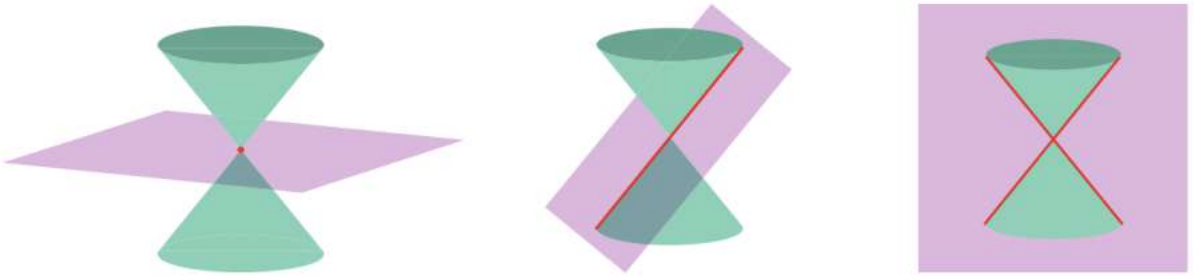
เมื่อระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย ระนาบตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงกลม (circle)**

เมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงรี (ellipse)**

เมื่อระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวย ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **พาราโบลา (parabola)**

และเมื่อระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้าง หรือเมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย แต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดเล็กกว่า α ระนาบจะตัดกรวยสองข้างได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)**

ถ้าระนาบผ่านจุดยอดของกรวย รอยตัดของระนาบกับกรวยจะเป็นจุด หรือเส้นตรงหนึ่งเส้น หรือเส้นตรงสองเส้นตัดกัน ซึ่งเรียกลักษณะดังกล่าวว่า **ภาคตัดกรวยลดรูป (degenerate conics)** ดังรูป



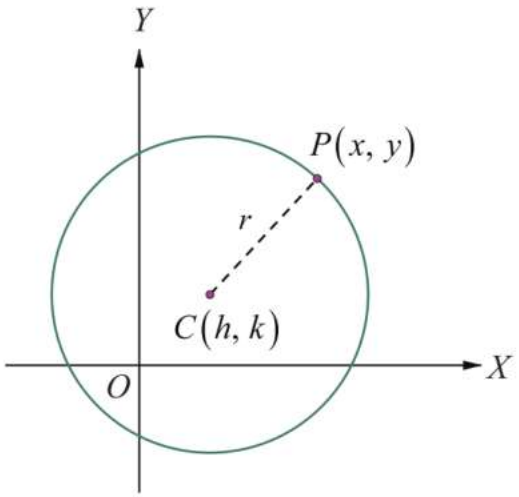
จุด 1 จุด เส้นตรง 1 เส้น เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

รูปที่ 15

3.2.1 วงกลม

บทนิยาม 2

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง (center)** ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลายเรียกว่า **รัศมี (radius)** ของวงกลม



รูปที่ 16

จากรูป วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(h,k)$ และรัศมียาว r หน่วย จะหาสมการที่มีกราฟเป็นวงกลมรูปนี้ได้โดย สมมุติว่า $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม เนื่องจากระยะทางระหว่าง $P(x,y)$ และ $C(h,k)$ เท่ากับ r หน่วย นั่นคือ $PC = r$ ดังนั้น จากสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด จะได้

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

นั่นคือ $$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$ เป็นสมการของวงกลมที่ต้องการ

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

สมการนี้เรียกว่า รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

ข้อสังเกต จากบทนิยามของวงกลมและรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม สรุปได้ว่า วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ

$$\left\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (x-h)^2+(y-k)^2=r^2\right\}$$

ตัวอย่างที่ 22

จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $(x+2)^2+(y-3)^2=16$ พร้อมทั้งเขียนวงกลม

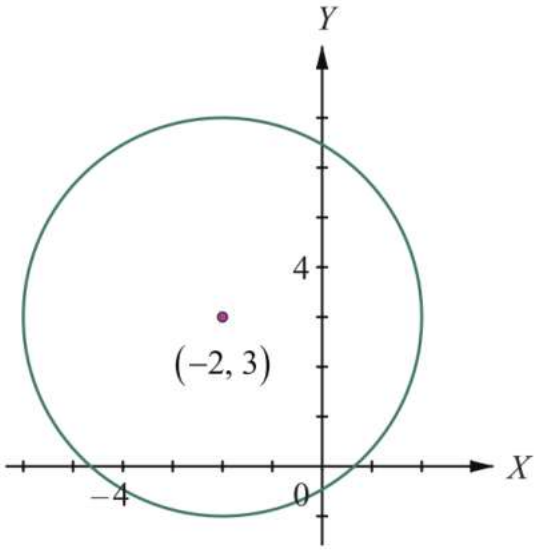
วิธีทำ จาก $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$

จะได้ $(x-(-2))^2+(y-3)^2 = 4^2$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม จะได้ $h=-2, k=3$ และ $r=4$

ดังนั้น วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 3)$ และรัศมียาว 4 หน่วย

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 23

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีรัศมียาว 3 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$

วิธีทำ จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

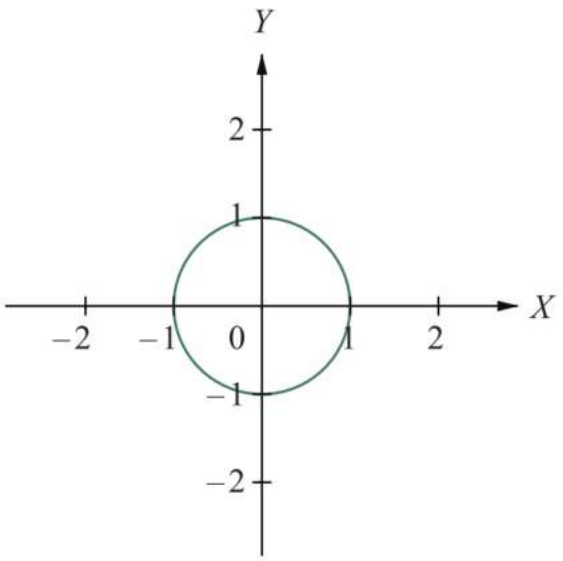
แทน r, h และ k ด้วย $3, 2$ และ -1 ตามลำดับ

จะได้ $(x-2)^2+(y-(-1))^2 = 3^2$

นั่นคือ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ เป็นรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$ คือ $x^2+y^2=r^2$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมียาว 1 หน่วย เรียกว่า **วงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle)** และมีสมการเป็น $x^2+y^2=1$ ดังรูป



รูปที่ 17

นอกจากการเขียนสมการวงกลมในรูปแบบมาตรฐานแล้ว ยังสามารถเขียนสมการวงกลมในรูปแบบอื่นได้อีก ดังนี้

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2 = 0$$

จะได้ $x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2) = 0$

ให้ $a=-2h,\ b=-2k$ และ $c=h^2+k^2-r^2$

จะได้ $x^2+y^2+ax+by+c = 0$

ในกรณีที่สมการ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ มีกราฟเป็นวงกลม เรียกสมการนี้ว่า **รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม**

ในกรณีทั่วไป สมการในรูปแบบ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ มีกราฟเป็นวงกลม หรือจุดหนึ่งจุด หรือไม่มีกราฟ จัดสมการ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = d$$

ถ้า $d>0$ สมการนี้จะมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุด (h, k) เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว $\sqrt{d}$ หน่วย แต่ถ้า $d=0$ สมการนี้จะมีกราฟเป็นจุด (h, k) เพียงจุดเดียว และถ้า $d<0$ สมการนี้ไม่มีกราฟ เพราะผลบวกของกำลังสองของจำนวนจริงเป็นจำนวนลบไม่ได้

ตัวอย่างที่ 24

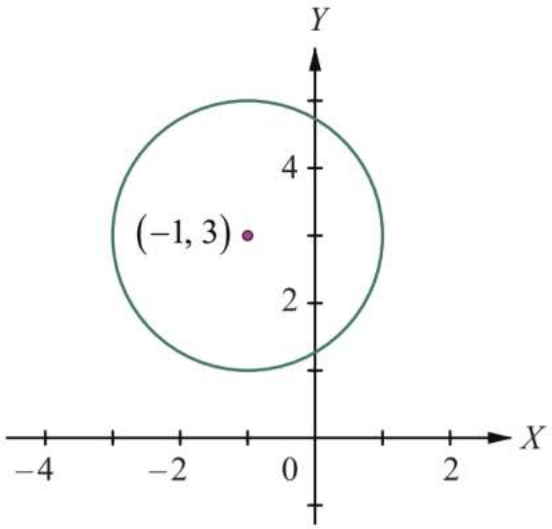
จงแสดงว่าสมการ $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ เป็นสมการวงกลม แล้วหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ เขียนสมการที่กำหนดให้ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม โดยจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ กล่าวคือ ทำให้ x^2+2x เป็นกำลังสองสมบูรณ์โดยการบวกด้วย 1 และทำให้ y^2-6y เป็นกำลังสองสมบูรณ์โดยการบวกด้วย 9

$$\begin{aligned}(x^2+2x)+(y^2-6y) &= -6\\ (x^2+2x+1)+(y^2-6y+9) &= -6+1+9\\ (x+1)^2+(y-3)^2 &= 4\end{aligned}$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม จะได้ $h=-1,\ k=3$ และ $r=2$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี $(-1, 3)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาว 2 หน่วย และเขียนวงกลมได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 25

จงหาสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไปที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 2)$ และผ่านจุด $(3, -2)$

วิธีทำ เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(3, -2)$ จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลาง $(-1, 2)$ และจุด $(3, -2)$ คือ ความยาวของรัศมีของวงกลม

ดังนั้น $r = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{32}$

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมนี้ คือ

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 32$$

ดังนั้น รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมนี้ คือ

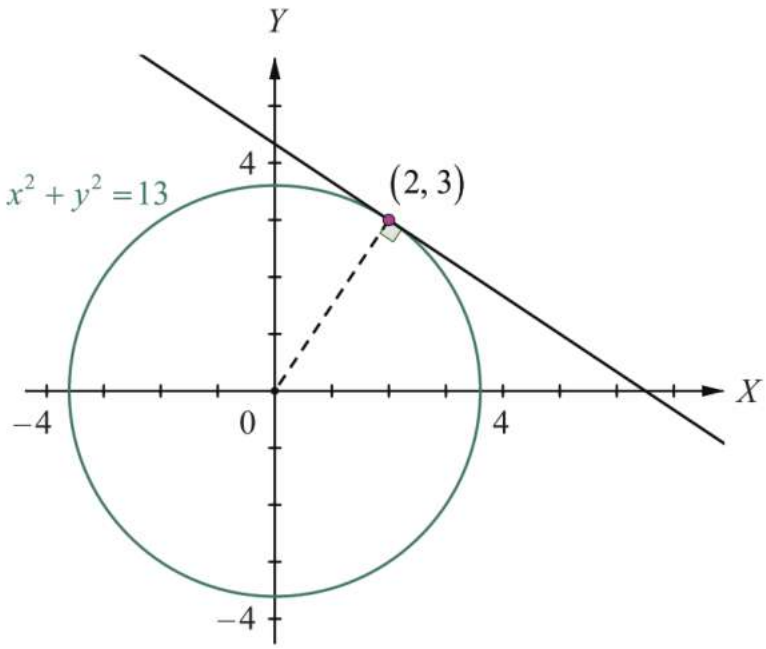
$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 32$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 27 = 0$$

ตัวอย่างที่ 26

จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=13$ ที่จุด $(2,3)$

วิธีทำ



เส้นสัมผัสวงกลมที่ผ่านจุด $(2,3)$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่ผ่านจุด $(2,3)$

ความชันของรัศมีที่ผ่านจุด $(2,3)$ คือ $m=\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $(2,3)$ คือ $-\frac{2}{3}$

และสมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมที่จุด $(2,3)$ คือ

$$y-3 = -\frac{2}{3}(x-2)$$

หรือ $$y = -\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$$

แบบฝึกหัด 3.2.1

1. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3, 2)$ และผ่านจุด $(7, 4)$ จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมนี้

2. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, -3)$ และมีแกน X เป็นเส้นสัมผัส จงหาจุดสัมผัส

3. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, 4)$ และผ่านจุด $(6, 8)$ จงหาความยาวรัศมีของวงกลมนี้ และตรวจสอบว่าจุด $(0, 0)$ อยู่บนวงกลมนี้หรือไม่

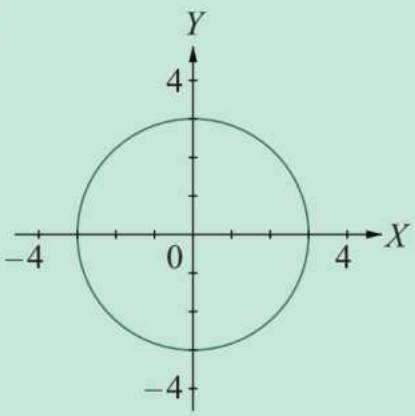
4. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งเป็น $(1, 3)$ และ $(7, 11)$ จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง และสมการของวงกลมนี้

5. จงเขียนสมการวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 54 = 0$ ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน และจงอธิบายว่าต้องเลื่อนวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับรัศมีของวงกลมที่กำหนดให้ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดอย่างไร จึงจะได้วงกลมที่กำหนดให้ข้างต้น

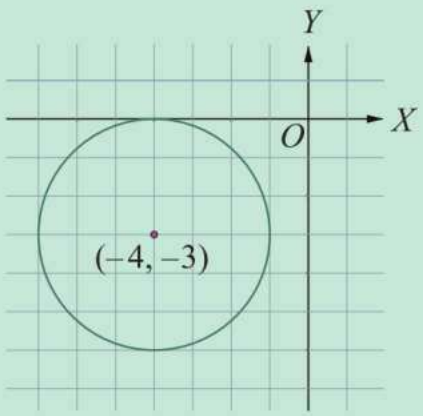
6. ต้นข้าวกล่าวว่า วงกลมซึ่งมีสมการ $x^2 + (y-5)^2 = 10$ มีรัศมียาว 10 หน่วย ต้นข้าวเข้าใจถูกหรือผิดอย่างไร จงอธิบาย

7. จงเขียนสมการในรูปแบบมาตรฐานของกราฟต่อไปนี้

1)



2)



8. จงหาสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนวงกลม
   1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,-1)$ และรัศมียาว 3 หน่วย
   2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และผ่านจุด $(7,4)$
   3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1,5)$ และผ่านจุด $(-4,-6)$
   4) จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง คือ $(-1,3)$ และ $(7,-5)$
   5) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(7,-3)$ และสัมผัสกับแกน X
   6) วงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 1 และสัมผัสแกน X และแกน Y รัศมียาว 5 หน่วย

9. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมที่มีสมการดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนวงกลม
   1) $(x-2)^2+(y-4)^2=9$
   2) $(x-2)^2+y^2=49$
   3) $x^2+(y-4)^2=\frac{16}{25}$
   4) $(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=10$

10. จงแสดงว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการวงกลม แล้วหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม
   1) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$
   2) $x^2+y^2+y=0$
   3) $x^2+y^2+10x-4y+13=0$
   4) $x^2+y^2+x+2y+1=0$
   5) $x^2+y^2+6x+2=0$
   6) $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}=0$

11. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1,1)$ และสัมผัสกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $3x-2y+18=0$

12. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่นอกวงกลม $x^2+y^2=4$ แต่อยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2-4y-12=0$

13. จงหาสมการเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2+y^2-10x=0$ ณ จุดที่วงกลมตัดเส้นตรง $4x+3y=20$

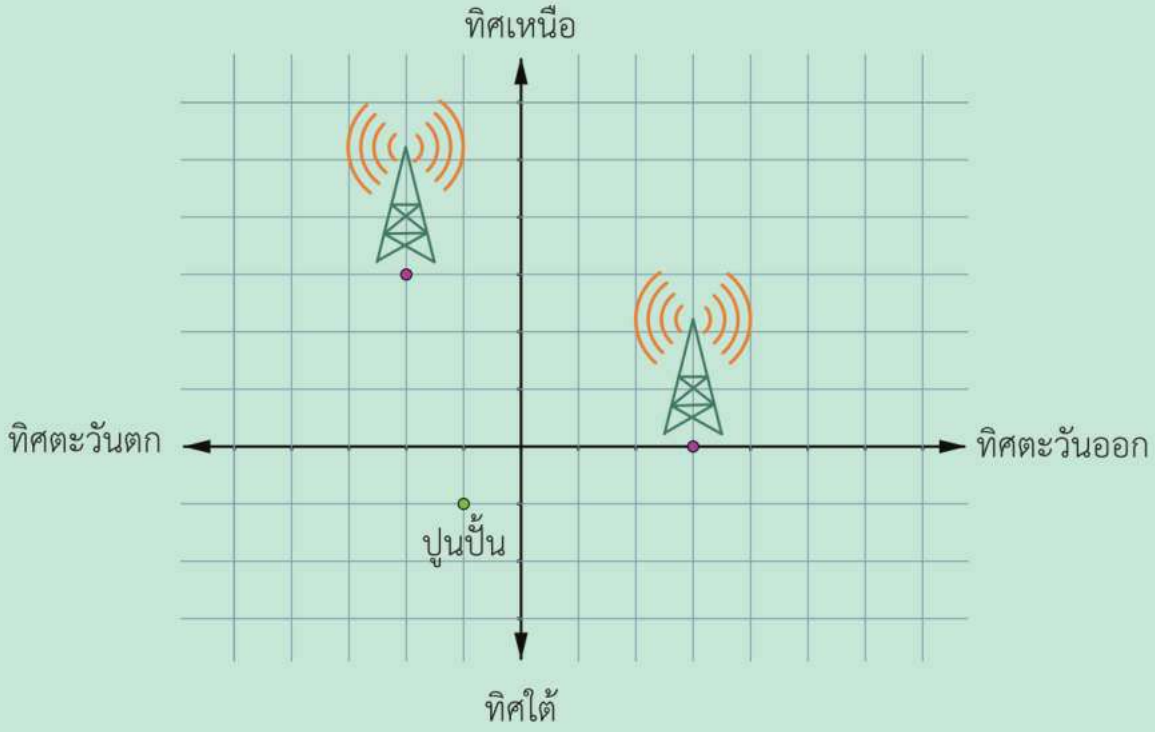
14. ดาวเทียมไทยคมมีวงโคจรเป็นวงกลมตามระนาบศูนย์สูตรของโลก และมีความสูงจากพื้นโลกประมาณ 35,800 กิโลเมตร
    1) จงเขียนสมการของวงโคจรของดาวเทียมไทยคม เมื่อให้จุดศูนย์กลางของโลกเป็นจุดศูนย์กลางของวงโคจร และสมมติให้โลกมีลักษณะเป็นทรงกลมที่มีรัศมียาวประมาณ 6,400 กิโลเมตร
    2) จงเขียนกราฟวงกลมที่แทนโลกและวงโคจรของดาวเทียมไทยคมด้วยอัตราส่วนที่เหมาะสม

เสริมสมอง : ดาวเทียมไทยคม

ที่มา : บริษัท ไทยคม จำกัด (มหาชน)

ดาวเทียมไทยคมเป็นดาวเทียมสื่อสารที่ใช้เพื่อรองรับความต้องการใช้งานของการรับ-ส่งสัญญาณรายการโทรทัศน์โดยตรงจากดาวเทียมสู่ผู้ชมตามบ้านเรือน ดาวเทียมไทยคมมีวงโคจรค้างฟ้า ซึ่งจะโคจรเป็นวงกลมมีเส้นทางโคจรตามระนาบศูนย์สูตร อยู่สูงจากพื้นโลกประมาณ 35,800 กิโลเมตร โดยมีทิศทางและอัตราเร็วในการโคจรรอบโลกเช่นเดียวกับทิศทางและอัตราเร็วในการหมุนรอบตัวเองของโลก ทำให้ตำแหน่งของดาวเทียมสัมพันธ์กับตำแหน่งบนพื้นโลกในบริเวณเดิมเสมอ

15. โดยทั่วไปเสาสัญญาณโทรศัพท์จะปล่อยสัญญาณออกมาในลักษณะเป็นวงกลม ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีเสาสัญญาณโทรศัพท์อยู่ 2 ต้น ซึ่งแต่ละต้นจะปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 7 กิโลเมตร ถ้าปูนปั้นกำลังขับรถยนต์ไปหมู่บ้านข้างเคียงแต่น้ำมันหมดระหว่างทางซึ่งเป็นตำแหน่งที่ไม่มีสัญญาณโทรศัพท์ ดังรูป



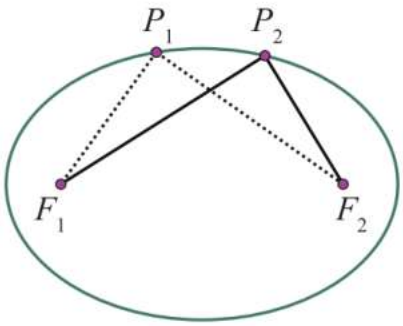
กำหนดให้ 1 หน่วย ในรูป แทนระยะทาง 2 กิโลเมตร จงหาว่า

1) ปูนปั้นจะต้องเดินไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทางอย่างน้อยกี่กิโลเมตร จึงจะมีสัญญาณโทรศัพท์
2) ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ปูนปั้นจะเดินไปยังตำแหน่งที่มีสัญญาณโทรศัพท์เป็นเท่าใด

3.2.2 วงรี

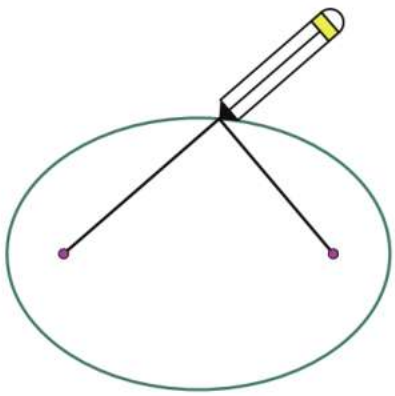
บทนิยาม 3

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี



$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2$ เป็นค่าคงตัว

รูปที่ 18

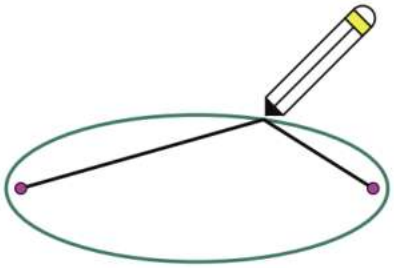


รูปที่ 19

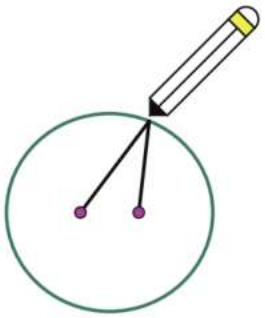
จากบทนิยามนี้ มีวิธีง่าย ๆ ในการเขียนรูปวงรี (ดังรูปที่ 19) โดยวางกระดาษบนกระดานวาดรูป ปักหมุด 2 ตัว ที่จุดต่างกัน ใช้เป็นโฟกัสของวงรี ใช้เชือกเส้นหนึ่งที่ยาวกว่าระยะทางระหว่างหมุดทั้งสอง ผูกปลายเชือกแต่ละข้างกับหมุด ใช้ดินสอรั้งเชือกให้ตึงตลอดเวลา ขณะที่ค่อย ๆ เคลื่อนดินสอรอบโฟกัส รอยดินสอที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปวงรีเพราะผลบวกของระยะทางจากจุดปลายดินสอถึงโฟกัสทั้งสองเท่ากับความยาวของเชือกซึ่งมีความยาวคงตัวเสมอ

ถ้าเชือกยาวกว่าระยะห่างระหว่างโฟกัสเพียงเล็กน้อย วงรีที่วาดได้จะมีรูปร่างเรียวยาวดังเช่นในรูปที่ 20ก แต่ถ้าเชือกยาวกว่าระยะห่างระหว่างโฟกัสมากหรือโฟกัสทั้งสองอยู่ใกล้กัน เมื่อเปรียบเทียบกับความยาวของเชือก วงรีที่วาดได้จะมีรูปร่างใกล้เคียงกับวงกลม ดังเช่นในรูปที่ 20ข

คำถาม ถ้าโฟกัสทับซ้อนกันนักเรียนคิดว่าวงรีที่วาดได้จะเป็นรูปอะไร

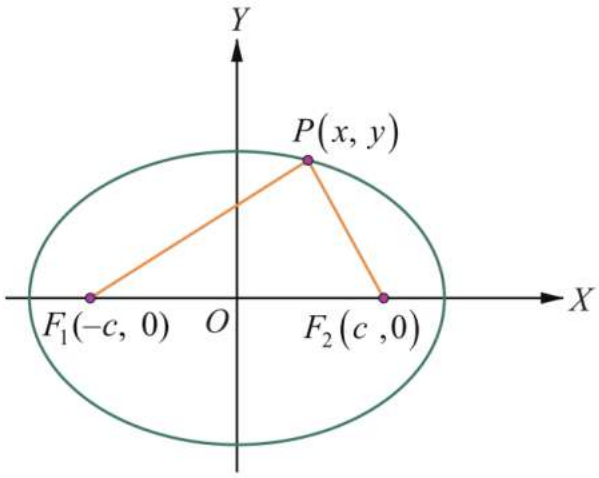


รูปที่ 20ก



รูปที่ 20ข

ในการหารูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ทำได้โดยกำหนดให้โฟกัสอยู่บนแกน X ที่ $F_1(-c,\ 0)$ และ $F_2(c\ ,0)$ จุดกำเนิดอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัส ดังรูป



รูปที่ 21

เพื่อความสะดวก ให้ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีถึงโฟกัสทั้งสอง คือ $2a$ หน่วย โดยที่ $0<c<a$ จะได้ว่า ถ้า $P(x,\ y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรีแล้ว

$$\begin{aligned}
PF_1 + PF_2 &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\
x^2-2cx+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 4a^2+4cx \\
a^2\left[(x+c)^2+y^2\right] &= \left(a^2+cx\right)^2 \\
a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4+2a^2cx+c^2x^2 \\
a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2 \\
\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right) \qquad \text{------- } (1)
\end{aligned}$$

จาก $0<c<a$ ดังนั้น $a^2-c^2>0$

จากสมการ (1) จะได้

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \qquad \text{------- } (2)$$

ให้ $b^2=a^2-c^2$ โดยที่ $b>0$ เนื่องจาก $b^2<a^2$ จะได้ว่า $b<a$

จากสมการ (2) จะได้สมการวงรีเป็น

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } a>b$$

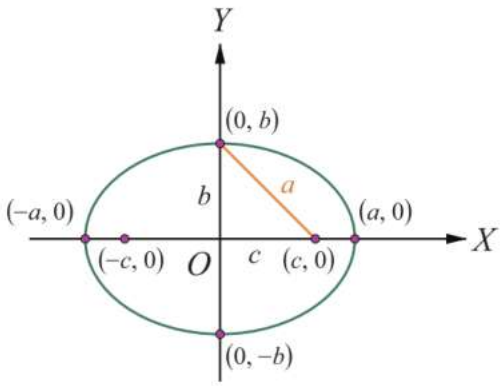
ในการเขียนวงรีรูปนี้ จะต้องทราบระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y

ให้ $y=0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} &= 1 \\
x^2 &= a^2 \\
x=a \text{ หรือ } x&=-a
\end{aligned}$$

ดังนั้น วงรีตัดแกน X ที่ $(-a, 0)$ และ $(a, 0)$ ซึ่งเรียกว่า **จุดยอด (vertex)** ของวงรี ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดเรียกว่า **แกนเอก (major axis)** ของวงรี ความยาวของแกนเอกเท่ากับ $2a$ หน่วย จุดกึ่งกลางของแกนเอกเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง (center)** ของวงรี โดยวงรีรูปนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

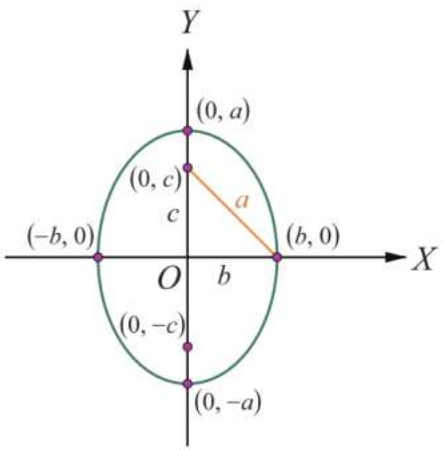
ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $x=0$ จะได้ $y=b$ หรือ $y=-b$ ดังนั้น วงรีตัดแกน Y ที่ $(0, -b)$ และ $(0, b)$ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสองนี้เรียกว่า **แกนโท (minor axis)** ของวงรี ความยาวของแกนโทเท่ากับ $2b$ หน่วย สังเกตว่า $2a > 2b$ ดังนั้น แกนเอกยาวกว่าแกนโท ดังรูป



รูปที่ 22

ถ้ากำหนดให้โฟกัสของวงรีอยู่บนแกน Y ที่จุด $(0, c)$ และ $(0, -c)$ ดังรูปที่ 23 จะได้สมการวงรีเป็น

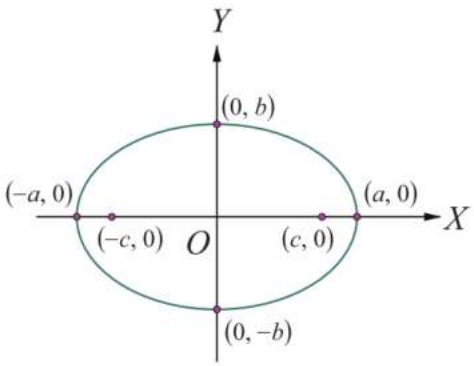
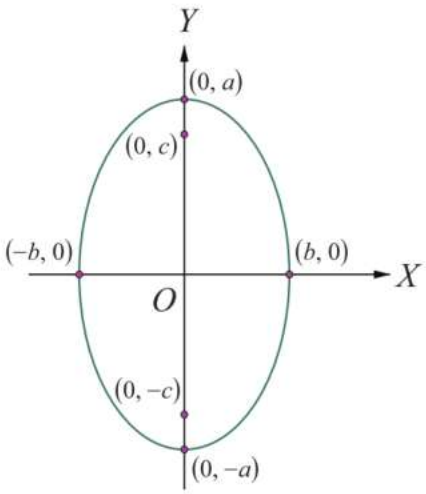
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ เมื่อ } a>b$$



รูปที่ 23

รายละเอียดที่สำคัญของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนเอกอยู่บนแกนพิกัด สรุปได้ดังนี้

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนเอกอยู่บนแกนพิกัด

สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\ a>b>0$
จุดยอด	$(-a,0),(a,0)$	$(0,-a),(0,a)$
แกนเอก	อยู่บนแกน X ยาว $2a$ หน่วย	อยู่บนแกน Y ยาว $2a$ หน่วย
แกนโท	อยู่บนแกน Y ยาว $2b$ หน่วย	อยู่บนแกน X ยาว $2b$ หน่วย
โฟกัส	$(-c,0),(c,0);\ c^2=a^2-b^2$	$(0,-c),(0,c);\ c^2=a^2-b^2$
กราฟ		

เสริมสมอง : Colosseum

โคลอสเซียม (Colosseum) เป็นสถาปัตยกรรมโรมัน ตั้งอยู่ในกรุงโรม ประเทศอิตาลี สร้างเสร็จใน ค.ศ. 80 เพื่อเป็นสนามกีฬากลางแจ้งขนาดใหญ่ สามารถจุคนได้ประมาณ 40,000-70,000 คน เมื่อมองลงมาจากด้านบนจะเห็นโคลอสเซียมมีลักษณะใกล้เคียงกับรูปวงรี นอกจากนี้ ชั้นใต้ดินของโคลอสเซียมยังมีความซับซ้อนเหมือนเขาวงกต โดยประกอบด้วยห้องสำหรับขังนักโทษและกรงขังสัตว์ร้ายเพื่อเตรียมขึ้นต่อสู้ รวมทั้งอุโมงค์ที่เชื่อมกับด้านนอก

ตัวอย่างที่ 27

วงรีวงหนึ่งมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

จงหาโฟกัส จุดยอด ความยาวของแกนเอกและแกนโท และเขียนวงรี

วิธีทำ จากสมการ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

จะได้ $a^2=16$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=4$ และ $b=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=16-4=12$ นั่นคือ $c=\sqrt{12}$

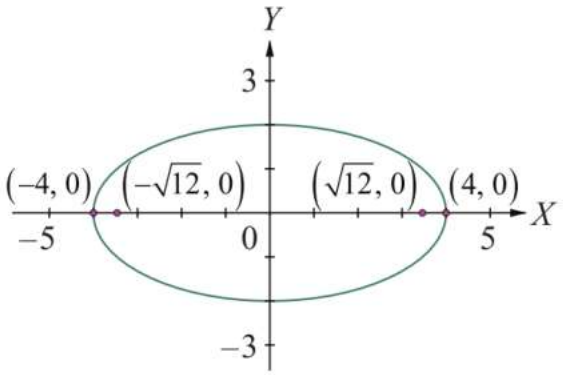
ดังนั้น โฟกัสของวงรี คือ $\left(-\sqrt{12},0\right)$ และ $\left(\sqrt{12},0\right)$

จุดยอด คือ $(-4,0)$ และ $(4,0)$

แกนเอกยาว 8 หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย

และเขียนวงรีได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 28

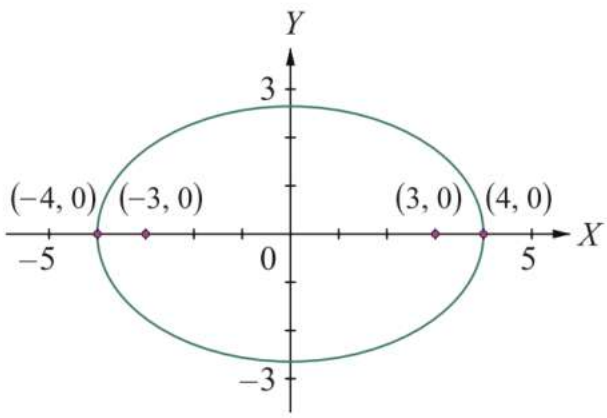
วงรีวงหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0), (4, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ $(-3, 0), (3, 0)$ จงหาสมการวงรีและเขียนวงรี

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่าแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X และเมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ จะได้ $a=4$ และ $c=3$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $3^2=4^2-b^2$

$$b^2=4^2-3^2=16-9=7$$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ และเขียนวงรีได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 29

จงหาโฟกัสและเขียนวงรีที่มีสมการเป็น $25x^2 + 9y^2 = 225$

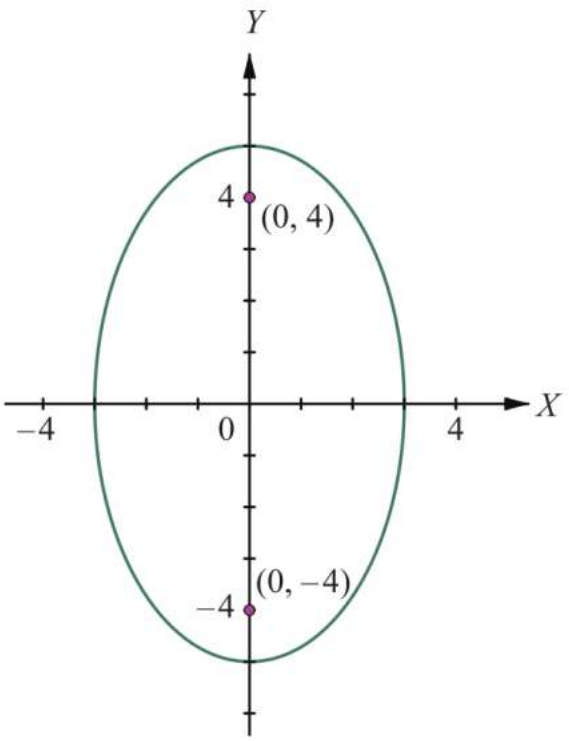
วิธีทำ จากสมการวงรีที่กำหนดให้ เขียนในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

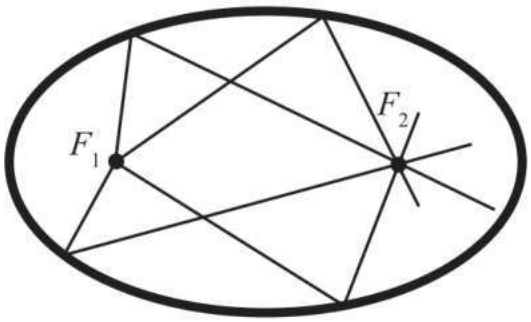
เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ จะได้ว่าแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y และ $a^2 = 25, b^2 = 9$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 25 - 9 = 16$ นั่นคือ $c = 4$

ดังนั้น โฟกัสของวงรี คือ $(0, -4)$ และ $(0, 4)$ และเขียนวงรีได้ดังนี้



ทรงรีเกิดจากการหมุนวงรีรอบแกนสมมาตร ถ้าให้แหล่งกำเนิดแสงอยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่งของทรงรี โดยทรงรีมีพื้นผิวด้านในที่สะท้อนแสง แล้วแสงจะสะท้อนจากพื้นผิวไปตกที่โฟกัสอีกจุดหนึ่งของทรงรี ดังรูป



รูปที่ 24

เสริมสมอง : Extracorporeal Shock Wave Lithotripsy

Extracorporeal Shock Wave Lithotripsy (ESWL) เป็นกระบวนการสลายนิ่วในไต โดยปล่อยคลื่นเสียงความเข้มสูงจากโฟกัสจุดหนึ่งไปกระทบกับพื้นผิวของแคปซูลทรงรี แล้วคลื่นเสียงนั้นจะสะท้อนไปทำลายก้อนนิ่วซึ่งอยู่ที่โฟกัสอีกจุดหนึ่ง วิธีการรักษาแบบนี้ทำให้เนื้อเยื่อรอบก้อนนิ่วเสียหายเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ซึ่งจะช่วยลดระยะเวลาพักฟื้นของคนไข้

ย้อนกลับไปดูรูปที่ 20ก และ 20ข จะเห็นว่า ถ้า $2a$ มากกว่า $2c$ เพียงเล็กน้อย วงรีมีรูปร่างเรียวยาว (วงรีมีความรีมาก) แต่ถ้า $2a$ มากกว่า $2c$ มาก วงรีมีรูปร่างเกือบจะกลม (วงรีมีความรีน้อย) โดยทั่วไป จะใช้อัตราส่วนของ c ต่อ a วัดความรีของวงรี อัตราส่วนนี้เรียกว่า **ความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity)**

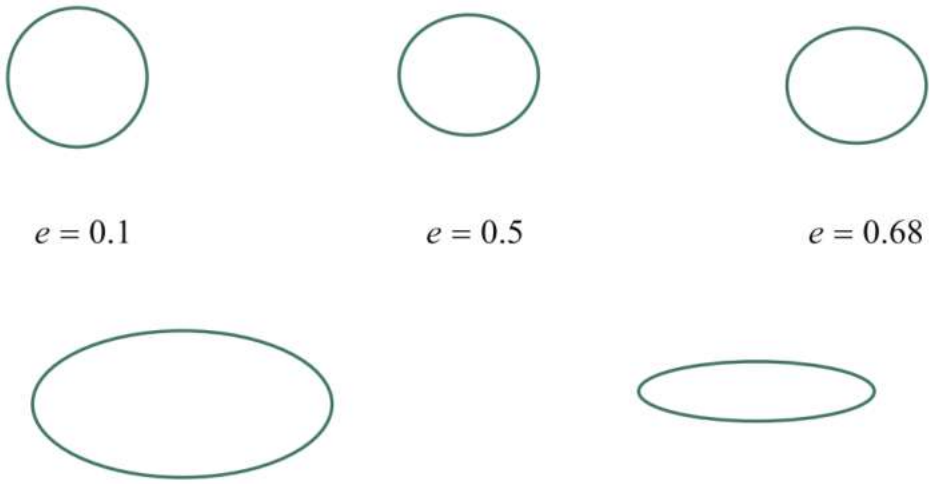
บทนิยาม 4

สำหรับวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ หรือ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ เมื่อ $a>b>0$

ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี แทนด้วย e คือ อัตราส่วนของ c ต่อ a

เมื่อ $c=\sqrt{a^2-b^2}$ นั่นคือ $e=\frac{c}{a}$

ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าระหว่าง 0 และ 1 นั่นคือ $0<e<1$ ถ้า e มีค่าใกล้ 1 หรือ c มีค่าเกือบจะเท่ากับ a แล้ววงรีมีความรีมาก (มีรูปร่างเรียวยาว) แต่ถ้า e มีค่าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (รูปร่างใกล้เคียงกับวงกลม) รูปที่ 25 แสดงวงรีที่มีความเยื้องศูนย์กลางต่าง ๆ กัน



รูปที่ 25

ตัวอย่างที่ 30

จงหาสมการวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ และความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{8}{15}$ แล้วเขียนวงรี

วิธีทำ เนื่องจาก $e=\frac{8}{15}$ และ $c=4$ จะได้

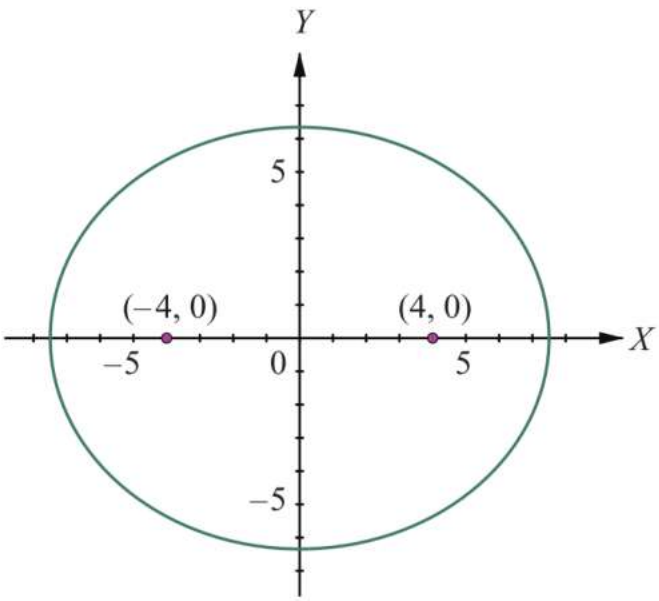
$$\frac{8}{15} = \frac{4}{a} \quad \text{(ความเยื้องศูนย์กลาง } e=\frac{c}{a}\text{)}$$

$$a = \frac{15}{2}$$

หาค่าของ b โดยใช้สมการ $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้

$$\begin{aligned} 4^2 &= \left(\frac{15}{2}\right)^2 - b^2 \\ b^2 &= \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 4^2 \\ &= \frac{161}{4} \\ b &= \frac{\sqrt{161}}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการวงรีคือ $\frac{4x^2}{225} + \frac{4y^2}{161} = 1$ และเขียนวงรีได้ดังนี้



เสริมสมอง : วงโคจรของดาวเคราะห์

แรงดึงดูดระหว่างดาวเคราะห์กับดวงอาทิตย์ทำให้ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์ วงโคจรของดาวเคราะห์เป็นวงรีเกือบกลม โดยมีจุดศูนย์กลางของดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่ง สมบัติข้อนี้ค้นพบโดย Johannes Kepler และพิสูจน์โดย Isaac Newton วงโคจรของดาวเคราะห์แต่ละดวงมีความรีหรือความเยื้องศูนย์กลางแตกต่างกัน ดังแสดงในตาราง

ดาวเคราะห์	ความเยื้องศูนย์กลาง
ดาวพุธ	0.205
ดาวศุกร์	0.007
โลก	0.017
ดาวอังคาร	0.094
ดาวพฤหัสบดี	0.049
ดาวเสาร์	0.057
ดาวยูเรนัส	0.046
ดาวเนปจูน	0.011
ดาวพลูโต*	0.244

* สหพันธ์ดาราศาสตร์สากลมีมติให้ดาวพลูโตเป็นดาวเคราะห์แคระในระบบสุริยะตั้งแต่วันที่ 24 สิงหาคม 2549 เป็นต้นไป

แบบฝึกหัด 3.2.2

1. จงหาจุดยอด โฟกัส ความเยื้องศูนย์กลาง ความยาวของแกนเอก และความยาวของแกนโทของวงรี แล้วเขียนกราฟ

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

3) $9x^2+4y^2=36$

4) $4x^2+25y^2=100$

5) $x^2+4y^2=16$

6) $4x^2+y^2=16$

7) $2x^2+y^2=3$

8) $5x^2+6y^2=30$

9) $x^2+4y^2=1$

10) $9x^2+4y^2=1$

11) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}y^2=\frac{1}{4}$

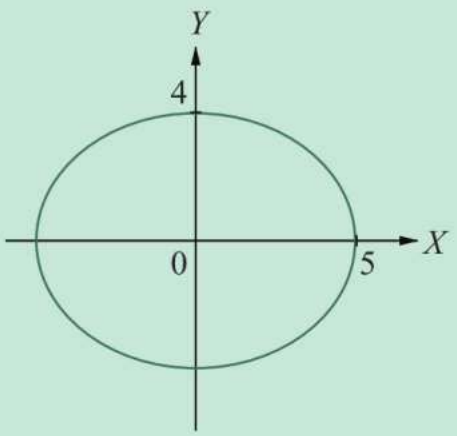
12) $x^2=4-2y^2$

13) $y^2=1-2x^2$

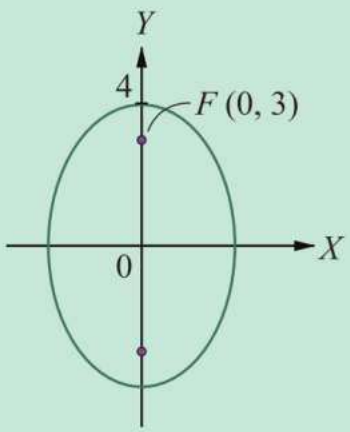
14) $20x^2+4y^2=5$

2. จงหาสมการวงรีที่มีกราฟดังแสดงในแต่ละข้อ

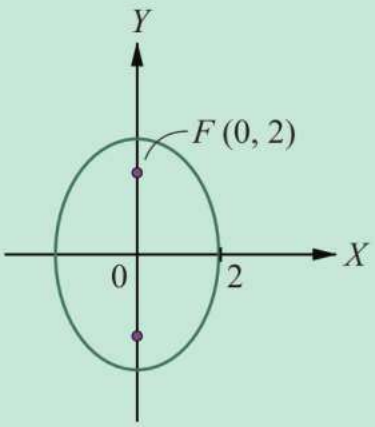
1)



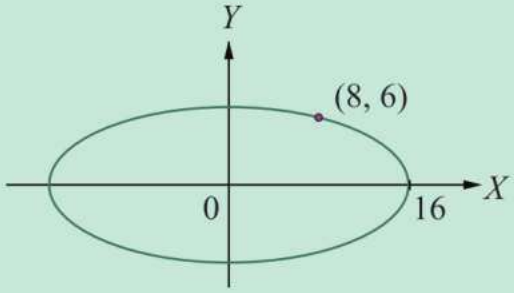
2)



3)



4)



3. จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

1) โฟกัส คือ $(-4, 0), (4, 0)$ และจุดยอด คือ $(-5, 0), (5, 0)$

2) โฟกัส คือ $(0, -3), (0, 3)$ และจุดยอด คือ $(0, -5), (0, 5)$

3) แกนเอกยาว 4 หน่วย แกนโทยาว 2 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน Y

4) แกนเอกยาว 6 หน่วย แกนโทยาว 4 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน X

5) โฟกัส คือ $(0, -2), (0, 2)$ และแกนโทยาว 6 หน่วย

6) โฟกัส คือ $(-5, 0), (5, 0)$ และแกนเอกยาว 12 หน่วย

7) จุดปลายแกนเอก คือ $(-10, 0), (10, 0)$ และระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 6 หน่วย

8) จุดปลายแกนโท คือ $(0, -3), (0, 3)$ และระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 8 หน่วย

9) แกนเอกยาว 10 หน่วย โฟกัสอยู่บนแกน X และวงรีผ่านจุด $\left(\sqrt{5}, 2\right)$

10) ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{1}{9}$ และโฟกัส คือ $(0, -2), (0, 2)$

11) ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ 0.8 และโฟกัส คือ $(-1.5, 0), (1.5, 0)$

12) ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ โฟกัสอยู่บนแกน Y และแกนเอกยาว 4 หน่วย

4. ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยที่ดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่ง จุดที่ดาวเคราะห์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด เรียกว่า perihelion และจุดที่ดาวเคราะห์อยู่ไกลดวงอาทิตย์มากที่สุด เรียกว่า aphelion จุดทั้งสองนี้เป็นจุดยอดของวงโคจร โลกอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ 147,000,000 กิโลเมตร ที่ perihelion และ 153,000,000 กิโลเมตร ที่ aphelion จงหาสมการของวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ (ให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจร)

5. ดาวพลูโตโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรีที่มีความเยื้องศูนย์กลางมากที่สุดประมาณ 0.25 และแกนโทของวงโคจรยาวประมาณ 10,000,000,000 กิโลเมตร จงหาระยะทางระหว่างดาวพลูโตกับดวงอาทิตย์ที่ perihelion และที่ aphelion

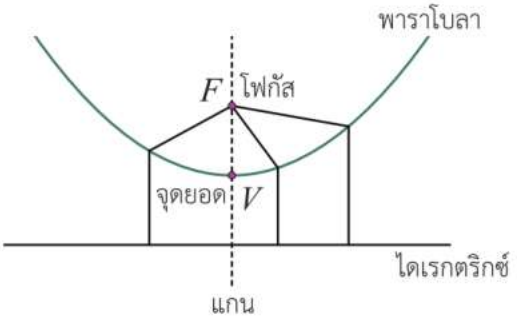
3.2.3 พาราโบลา

นักเรียนได้ศึกษาฟังก์ชันกำลังสองซึ่งมีกราฟเป็นพาราโบลามาแล้ว ในหัวข้อนี้จะพิจารณาสมบัติของพาราโบลาในเชิงภาคตัดกรวย โดยเริ่มต้นจากบทนิยามของพาราโบลาเชิงเรขาคณิต

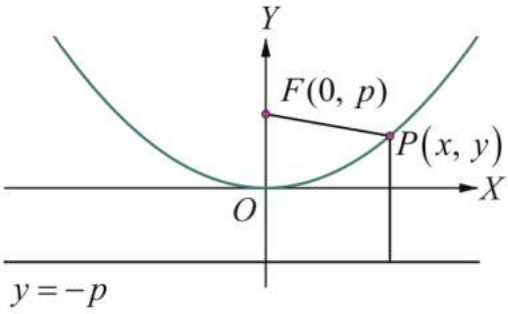
บทนิยาม 5

พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของพาราโบลา และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **เส้นบังคับ** หรือ **ไดเรกตริกซ์ (directrix)** ของพาราโบลา

จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์ เรียกว่า **จุดยอด (vertex)** ของพาราโบลา เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ เรียกว่า **แกนสมมาตร (axis of symmetry)** หรือ**แกน (axis)** ของพาราโบลา



รูปที่ 26



รูปที่ 27

ถ้าพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0, p)$ บนแกน Y แล้ว แกนสมมาตรจะอยู่ในแนวตั้งและสมการของไดเรกตริกซ์คือ $y=-p$ รูปที่ 27 แสดงพาราโบลากรณีที่ $p>0$

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วระยะทางจากจุด P ถึงโฟกัส F เท่ากับ $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$ หน่วย

ระยะทางจากจุด P ถึงไดเรกตริกซ์ เท่ากับ $|y+p|$ หน่วย

จากบทนิยามของพาราโบลา ระยะทางทั้งสองนี้ต้องเท่ากัน

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+(y-p)^2} &= |y+p| \\
x^2+(y-p)^2 &= |y+p|^2 \\
x^2+y^2-2yp+p^2 &= (y+p)^2 \\
x^2+y^2-2yp+p^2 &= y^2+2yp+p^2 \\
x^2 &= 4py
\end{aligned}$$

ถ้า $p>0$ แล้ว พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น แต่ถ้า $p<0$ แล้วพาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

รายละเอียดที่สำคัญของพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง สรุปได้ดังนี้

พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

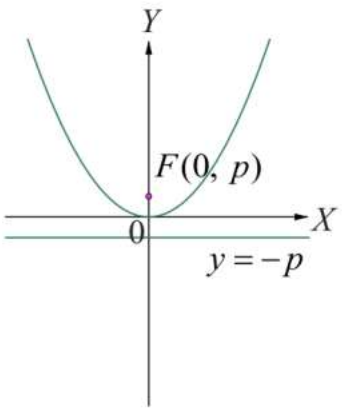
สมการรูปแบบมาตรฐาน $x^2=4py$

จุดยอด $V(0,0)$

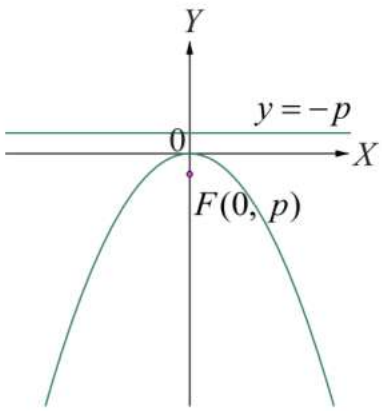
โฟกัส $F(0,p)$

ไดเรกตริกซ์ $y=-p$

กราฟ



$x^2=4py$ เมื่อ $p>0$



$x^2=4py$ เมื่อ $p<0$

ตัวอย่างที่ 31

จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $V(0, 0)$ และโฟกัส $F(0, 3)$ แล้วเขียนพาราโบลา

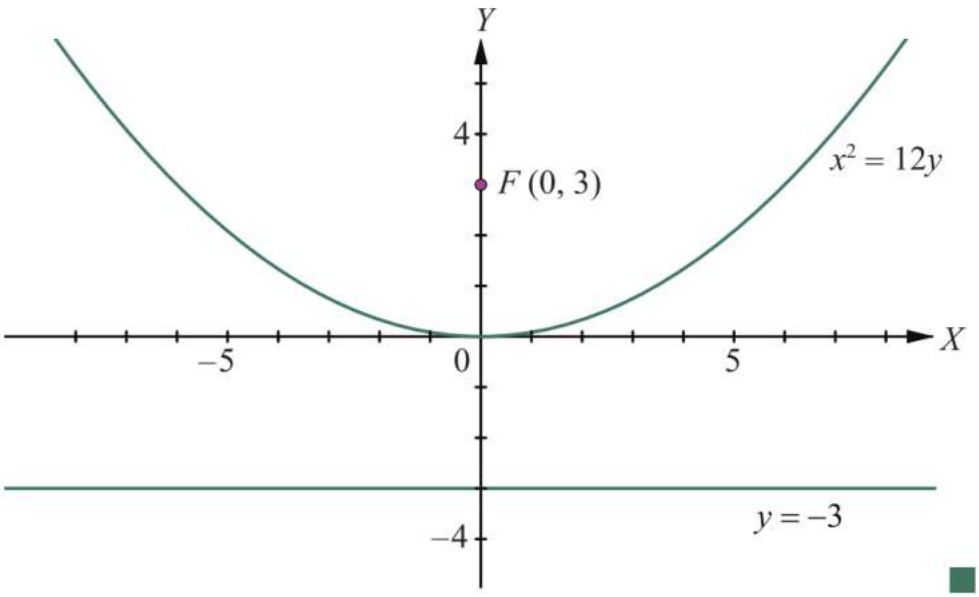
วิธีทำ เนื่องจากจุดยอด คือ $V(0, 0)$ และโฟกัส คือ $F(0, 3)$

จะได้ว่า $p = 3$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y = -3$ ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ

$$x^2 = 4(3)y$$

$$x^2 = 12y$$

เนื่องจาก $p = 3$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น และเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 32

จงหาโฟกัสและไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $y=-2x^2$ แล้วเขียนพาราโบลา

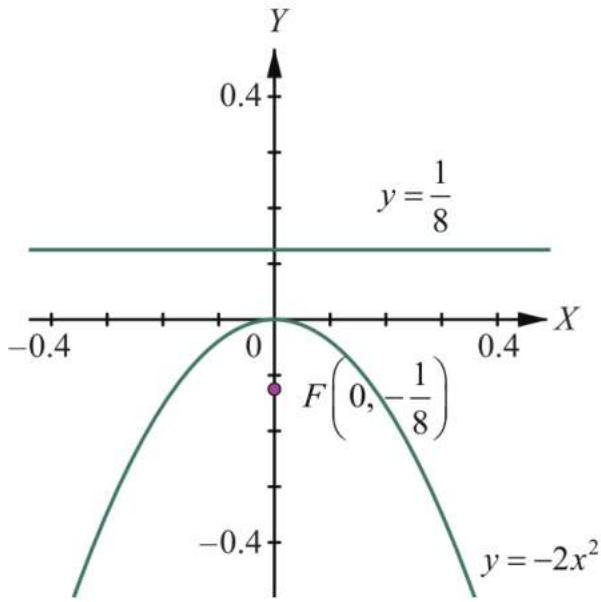
วิธีทำ จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ เขียนในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$x^2=-\frac{1}{2}y$$

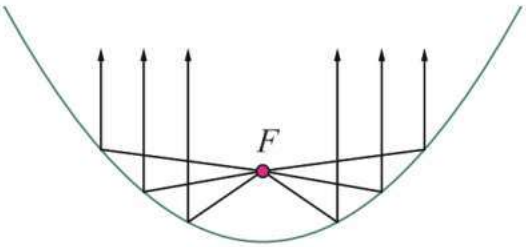
เมื่อเทียบกับสมการ $x^2=4py$ จะได้ $4p=-\frac{1}{2}$ นั่นคือ $p=-\frac{1}{8}$

ดังนั้น โฟกัส คือ $F\left(0,-\frac{1}{8}\right)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y=\frac{1}{8}$

เนื่องจาก $p=-\frac{1}{8}$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง และเขียนกราฟได้ดังนี้



ทรงพาราโบลาเกิดจากการหมุนพาราโบลารอบแกนสมมาตรมีภาคตัดขวางที่ผ่านแกนสมมาตรเป็นพาราโบลา ถ้าให้แหล่งกำเนิดแสงอยู่ที่โฟกัสของทรงพาราโบลา โดยทรงพาราโบลามีพื้นผิวด้านในที่สะท้อนแสง แล้วแสงจะสะท้อนจากพื้นผิวเป็นลำแสงขนาน ในทางกลับกันแสงที่พุ่งเข้ามายังพื้นผิวของทรงพาราโบลาในทิศทางที่ขนานกับแกนสมมาตรของทรงพาราโบลา แสงจะสะท้อนจากพื้นผิวไปรวมกันที่โฟกัส



รูปที่ 28

เสริมสมอง : เตารังสีแสงอาทิตย์

เตารังสีแสงอาทิตย์ (solar furnace) เป็นสิ่งก่อสร้างที่ออกแบบโดยนำกระจกมาเรียงต่อกันเป็นจานสะท้อนทรงพาราโบลา จากสมบัติการสะท้อนของพาราโบลา ทำให้แสงอาทิตย์รวมอยู่ที่โฟกัส ซึ่งมีอุณหภูมิสูงได้ถึง 3,500 องศาเซลเซียส พลังงานแสงอาทิตย์ที่ได้นี้นิยมนำไปใช้ในการผลิตไฟฟ้า การหลอมเหล็ก การผลิตเชื้อเพลิงไฮโดรเจน โดยเตารังสีแสงอาทิตย์ที่ใหญ่ที่สุดอยู่ที่ Font-Romeu-Odeillo-Via ซึ่งอยู่ทางตอนใต้ของประเทศฝรั่งเศส

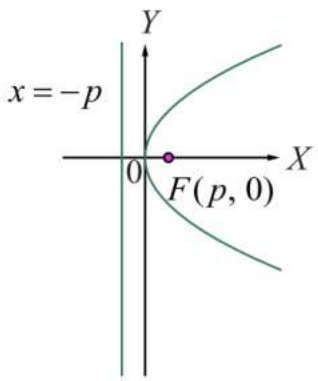
ถ้าพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและโฟกัสอยู่ที่จุด $F(p, 0)$ บนแกน X แล้ว แกนสมมาตรจะอยู่ในแนวนอนและสมการของไดเรกตริกซ์คือ $x = -p$ สามารถหาสมการของพาราโบลาได้เป็น

$$y^2 = 4px$$

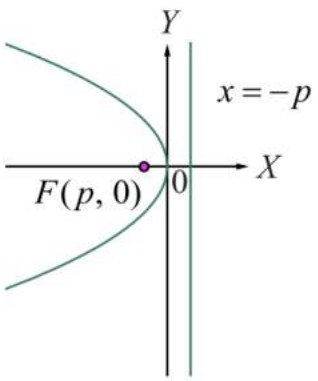
รายละเอียดที่สำคัญของพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน สรุปได้ดังนี้

พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน

สมการรูปแบบมาตรฐาน	$y^2 = 4px$
จุดยอด	$V(0, 0)$
โฟกัส	$F(p, 0)$
ไดเรกตริกซ์	$x = -p$
กราฟ	



$y^2 = 4px$ เมื่อ $p > 0$



$y^2 = 4px$ เมื่อ $p < 0$

ตัวอย่างที่ 33

จงหาโฟกัสและไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $4x + y^2 = 0$ แล้วเขียนพาราโบลา

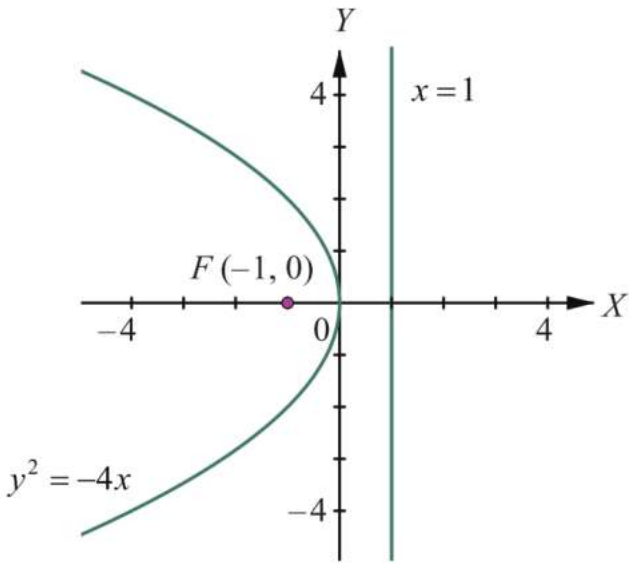
วิธีทำ จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ เขียนในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$y^2 = -4x$$

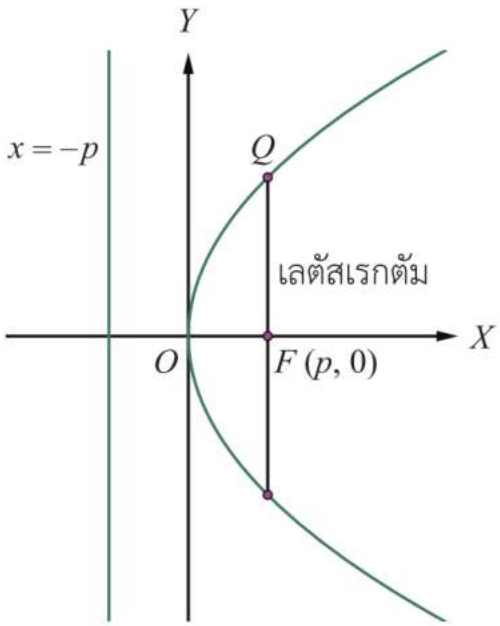
เมื่อเทียบกับสมการ $y^2 = 4px$ จะได้ $4p = -4$ นั่นคือ $p = -1$

ดังนั้น โฟกัส คือ $(-1, 0)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $x = 1$

เนื่องจาก $p = -1$ จะได้ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



เลตัสเรกตัม (latus rectum) คือ คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านโฟกัสของพาราโบลา (ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่บนพาราโบลาเรียกว่า **คอร์ด (chord)** ของพาราโบลา) ความยาวของเลตัสเรกตัม ใช้วัด**ความกว้าง**ของพาราโบลา จากรูปที่ 29 จะเห็นว่า ระยะทางจากจุด Q ซึ่งเป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเลตัสเรกตัมถึงโฟกัสเท่ากับ $|2p|$ หน่วย ดังนั้น เลตัสเรกตัมยาว $|4p|$ หน่วย



รูปที่ 29

ตัวอย่างที่ 34

จงหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y=\frac{1}{8}x^2$ แล้วเขียนพาราโบลา

วิธีทำ จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ เขียนในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$x^2=8y$$

เมื่อเทียบกับสมการ $x^2=4py$ จะได้ $4p=8$ นั่นคือ $p=2$

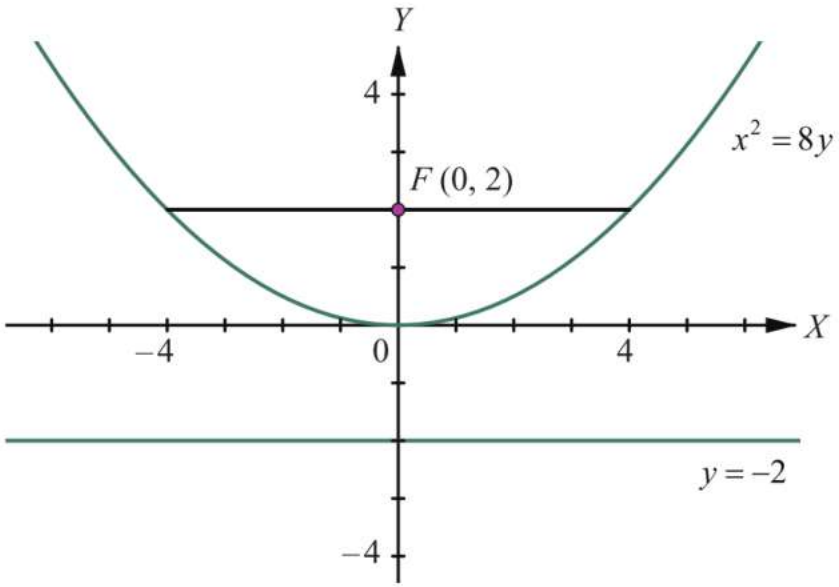
ดังนั้น โฟกัส คือ $(0, 2)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y=-2$

เลตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย

เนื่องจาก $p>0$ จะได้ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้

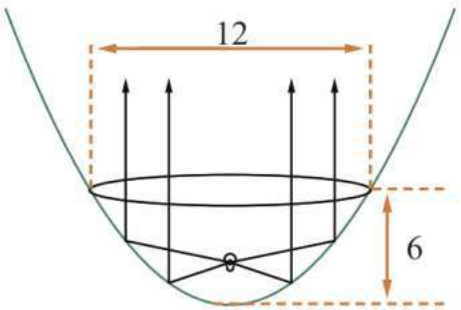


เสริมสมอง : Parabolic Aluminized Reflector Lamp

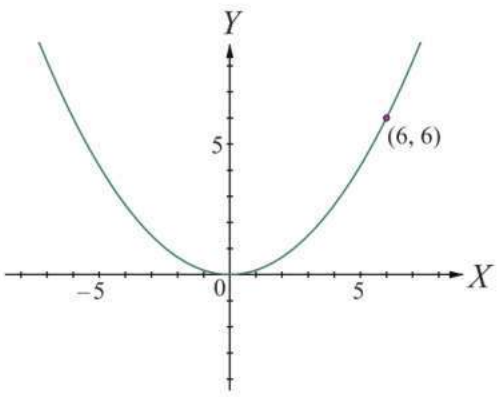
Parabolic Aluminized Reflector Lamp เป็นโคมไฟแบบหนึ่งที่มีลักษณะเป็นผิวโค้งทรงพาราโบลา จากสมบัติการสะท้อนของพาราโบลา เมื่อให้จุดกำเนิดแสงอยู่ตรงโฟกัส แสงจะตกกระทบพื้นผิว แล้วจะสะท้อนไปในแนวที่ขนานกับแกนของทรงพาราโบลา โคมไฟแบบนี้มักจะใช้ในงานแสดงคอนเสิร์ต โรงละคร และทางวิ่งเครื่องบิน

ตัวอย่างที่ 35

อุปกรณ์ส่องหาวัตถุมีโคมสะท้อนแสงทรงพาราโบลา กว้าง 12 นิ้ว และลึก 6 นิ้ว ดังรูป ถ้าต้องการให้ไส้หลอดไฟอยู่ที่โฟกัสของโคมเพื่อให้ผิวโคมไฟสะท้อนแสงเป็นลำขนานกับแกนของโคม ควรให้ไส้หลอดไฟอยู่ห่างจากจุดยอดของโคมสะท้อนแสงเท่าใด



วิธีทำ เขียนภาคตัดขวางรูปพาราโบลาของโคมในระนาบให้จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนของพาราโบลาอยู่บนแกน Y และจุด $(6, 6)$ อยู่บนพาราโบลา



จะได้ว่า สมการพาราโบลาอยู่ในรูปแบบ $x^2 = 4py$
เนื่องจากจุด $(6, 6)$ อยู่บนพาราโบลา ดังนั้น

$$6^2 = 4p(6)$$

$$36 = 24p$$

$$p = \frac{3}{2}$$

จะได้ โฟกัสคือ $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุดยอดและโฟกัสเท่ากับ $\frac{3}{2}$ หรือ 1.5 นิ้ว
ดังนั้น ควรให้ไส้หลอดไฟอยู่ห่างจากจุดยอดของโคมสะท้อนแสง 1.5 นิ้ว

ในตัวอย่างถัดไป จะเขียนพาราโบลาเพื่อแสดงให้เห็นว่า การเปลี่ยนระยะห่างระหว่างโฟกัสกับจุดยอดมีผลอย่างไรต่อความกว้างของพาราโบลา

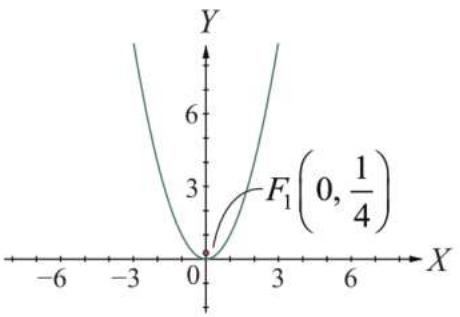
ตัวอย่างที่ 36

จงหาสมการพาราโบลาแต่ละรูปที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและโฟกัส $F_1\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $F_3(0, 1)$ และ $F_4(0, 4)$ พร้อมทั้งเขียนพาราโบลา

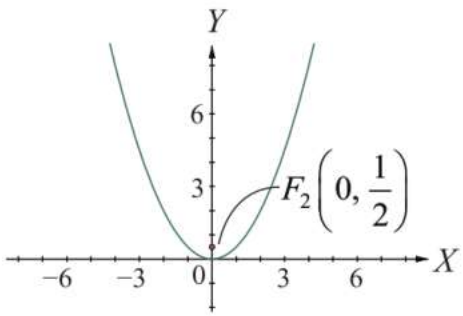
วิธีทำ เนื่องจากโฟกัสอยู่บนแกน Y ด้านบวก พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้นและมีสมการอยู่ในรูปแบบ $x^2 = 4py$ สมการพาราโบลาแต่ละรูปแสดงในตารางต่อไปนี้

โฟกัส	p	สมการ $x^2 = 4py$
$F_1\left(0, \frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$x^2 = y$
$F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$x^2 = 2y$
$F_3(0, 1)$	1	$x^2 = 4y$
$F_4(0, 4)$	4	$x^2 = 16y$

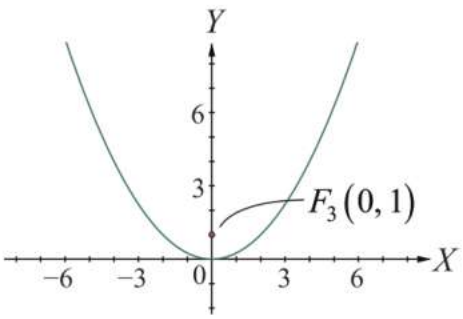
เขียนพาราโบลาทั้งสี่ ได้ดังนี้



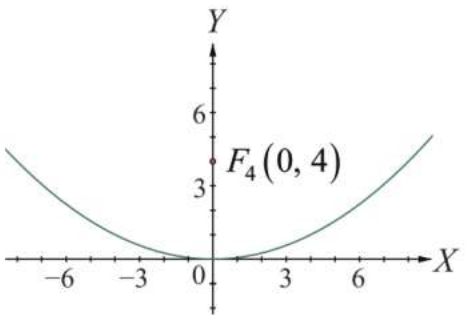
$x^2 = y$



$x^2 = 2y$



$x^2 = 4y$



$x^2 = 16y$ ■

แบบฝึกหัด 3.2.3

1. จงหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา แล้วเขียนกราฟ

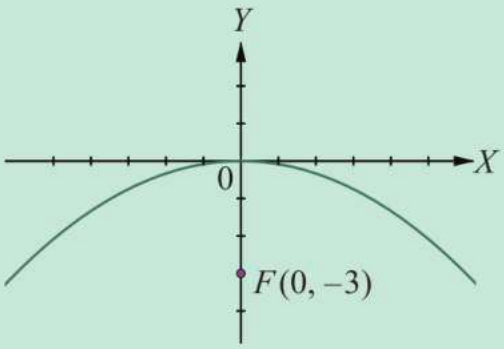
   1) $y=4x^2$
   2) $x=y^2$
   3) $x^2=9y$
   4) $y^2=-2x$
   5) $x^2=-8y$
   6) $x=\frac{1}{2}y^2$
   7) $x+6y^2=0$
   8) $x^2-7y=0$
   9) $5x^2+3y=0$
   10) $8x+12y^2=0$

2. จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

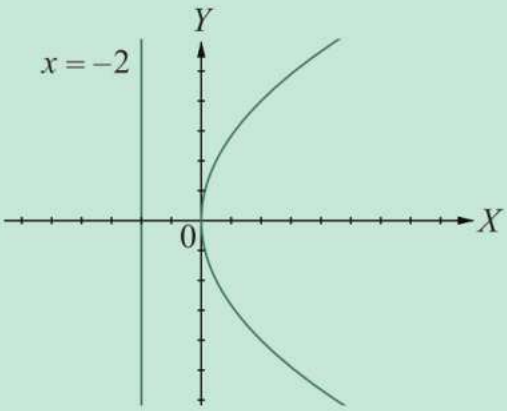
   1) โฟกัส คือ $F(2,0)$
   2) โฟกัส คือ $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$
   3) โฟกัส คือ $F(0,-8)$
   4) โฟกัส คือ $F(0,5)$
   5) ไดเรกตริกซ์ คือ $y=2$
   6) ไดเรกตริกซ์ คือ $x=6$
   7) ไดเรกตริกซ์ คือ $x=-10$
   8) ไดเรกตริกซ์ คือ $y=-\frac{1}{2}$
   9) โฟกัสอยู่บนแกน X ด้านบวก ห่างจากไดเรกตริกซ์ 2 หน่วย
   10) ไดเรกตริกซ์มีระยะตัดแกน Y (y-intercept) เป็น 6
   11) พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น มีโฟกัสห่างจากจุดยอด 8 หน่วย
   12) ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 8 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน Y ด้านลบ

3. จงหาสมการพาราโบลาซึ่งมีกราฟดังแสดงในรูป

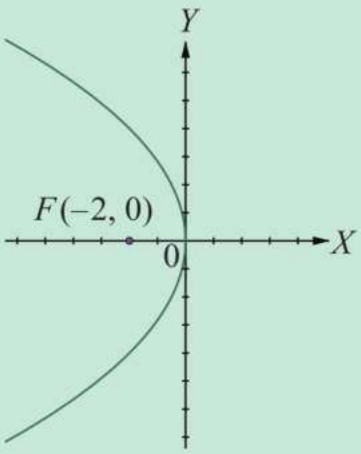
1)



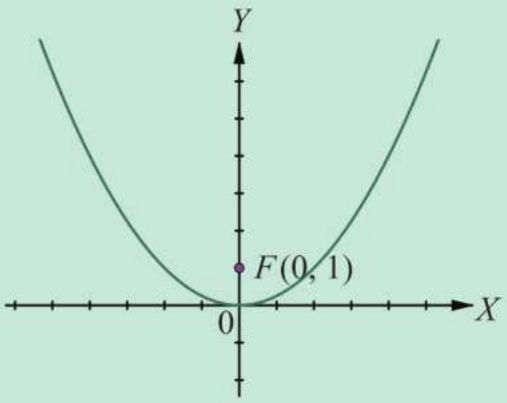
2)



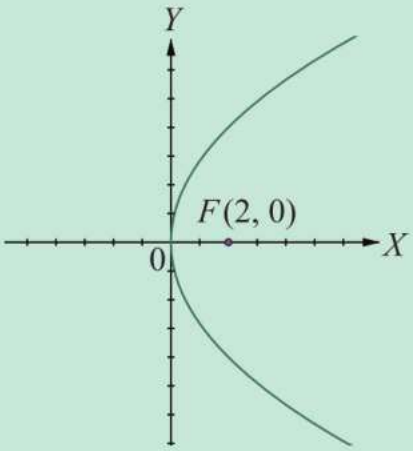
3)



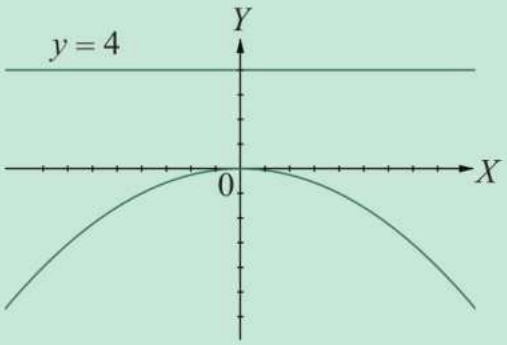
4)



5)



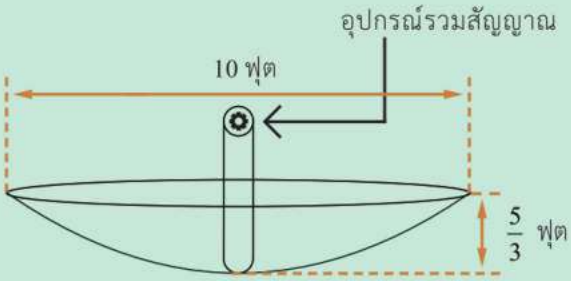
6)



4. วิศวกรออกแบบจานรับสัญญาณดาวเทียมโดยให้พื้นผิวที่รับสัญญาณเป็นทรงพาราโบลา จานกว้าง 10 ฟุต และลึก $\frac{5}{3}$ ฟุต ดังรูป

1) ถ้ากำหนดระบบพิกัดฉากให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดยอด และแกน Y ซ้อนกับแกนของพาราโบลาแล้ว จงหาสมการพาราโบลา

2) ควรติดตั้งอุปกรณ์รวมสัญญาณไว้ในตำแหน่งใด ห่างจากจุดยอดเท่าใด



เสริมสมอง : จานรับสัญญาณดาวเทียม

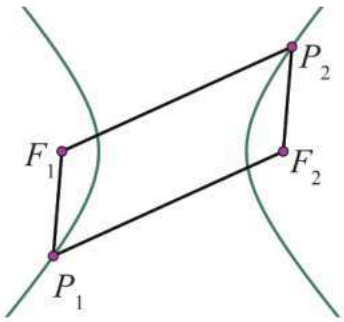
เมื่อจานรับสัญญาณดาวเทียมหันไปตรงกับดาวเทียมที่ต้องการรับข้อมูล สัญญาณจากดาวเทียมจะตกกระทบที่จานรับสัญญาณดาวเทียม แล้วจะสะท้อนไปรวมกันที่โฟกัส

3.2.4 ไฮเพอร์โบลา

แม้ว่ารูปร่างของไฮเพอร์โบลากับวงรีจะแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง แต่บทนิยามและสมการของภาคตัดกรวยสองชนิดนี้คล้ายกัน โดยวงรีใช้ผลบวกของระยะทางจากโฟกัสทั้งสองในการนิยาม ในขณะที่ไฮเพอร์โบลาใช้ผลต่างของระยะทาง

บทนิยาม 6

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส (focus)** ของไฮเพอร์โบลา



$|P_1F_1 - P_1F_2| = |P_2F_1 - P_2F_2|$ เป็นค่าคงตัว

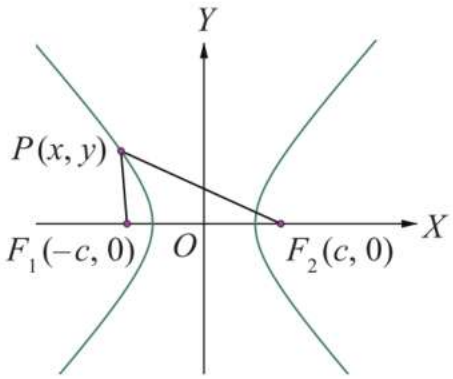
รูปที่ 30

เสริมสมอง : หอหล่อเย็น

Cooling Tower ที่ Cattenom Nuclear Power Plant

หอหล่อเย็น (cooling tower) เป็นสิ่งก่อสร้างที่สร้างขึ้นเพื่อระบายความร้อน หอหล่อเย็นสำหรับเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ที่ออกแบบให้เป็นทรงไฮเพอร์โบลา (hyperboloid) ทำให้ใช้วัสดุน้อย มีความแข็งแรง ทนต่อแรงลม และช่วยระบายความร้อน หอหล่อเย็นช่วยลดอุณหภูมิของน้ำให้ต่ำลงและปรับคุณภาพของน้ำก่อนที่จะระบายออกสู่แหล่งน้ำเพื่อลดผลกระทบที่จะเกิดขึ้นกับระบบนิเวศ

เช่นเดียวกับวงรี จะหาสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาโดยให้โฟกัสอยู่บนแกน X ที่จุด $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ ดังรูป



จุด P อยู่บนไฮเพอร์โบลา
รูปที่ 31

จากบทนิยาม ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา แล้ว $|PF_1 - PF_2|$ เป็นจำนวนจริงบวกเสมอ สมมติว่าจำนวนจริงบวกนี้คือ $2a$ โดยที่ $2a < 2c$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
|PF_1 - PF_2| &= 2a \\
\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(cx - a^2)^2 &= a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 &= a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) \\ c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 &= a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 \\ c^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\ c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\ \left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 &= a^2\left(c^2 - a^2\right) \qquad \text{-------}(1) \end{aligned}$$

จาก $0 < a < c$ ดังนั้น $c^2 - a^2 > 0$ และจากสมการ (1) จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad \text{-------}(2)$$

ให้ $b^2 = c^2 - a^2$ โดยที่ $b > 0$ จากสมการ (2) จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

สมการที่ได้นี้คือสมการไฮเพอร์โบลา โดยไฮเพอร์โบลาตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ และ $(-a, 0)$ เรียกว่า **จุดยอด (vertex)** ของไฮเพอร์โบลา และไม่ตัดแกน Y เนื่องจากเมื่อให้ $x = 0$ ในสมการไฮเพอร์โบลา จะได้ $-y^2 = b^2$ ซึ่งไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง นอกจากนั้น จากสมการไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{และ} \quad 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$

ดังนั้น $x^2 \geq a^2$

และจะได้ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

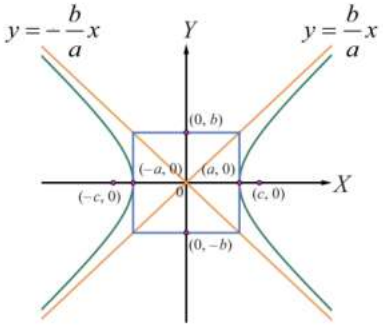
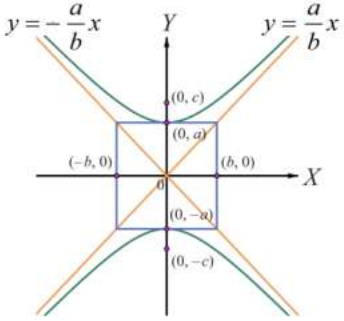
ไฮเพอร์โบลาประกอบด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น แต่ละเส้นเรียกว่า **กิ่ง (branch)** ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดบนแต่ละกิ่งของไฮเพอร์โบลาเรียกว่า **แกนตามขวาง (transverse axis)** และจุดกึ่งกลางของแกนตามขวางเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง (center)** ไฮเพอร์โบลารูปนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาซึ่งยาว $2b$ หน่วย เรียกว่า **แกนสังยุค (conjugate axis)** ถ้าให้โฟกัสของ

ไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน Y ที่จุด $(0, c)$ และ $(0, -c)$ แกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาจะอยู่ในแนวตั้ง และสมการไฮเพอร์โบลาจะเป็น

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

รายละเอียดที่สำคัญของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนตามขวางอยู่บนแกนพิกัด สรุปได้ดังนี้

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนตามขวางอยู่บนแกนพิกัด

สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$
จุดยอด	$(-a, 0), (a, 0)$	$(0, -a), (0, a)$
แกนตามขวาง	อยู่บนแกน X ยาว $2a$ หน่วย	อยู่บนแกน Y ยาว $2a$ หน่วย
แกนสังยุค	อยู่บนแกน Y ยาว $2b$ หน่วย	อยู่บนแกน X ยาว $2b$ หน่วย
เส้นกำกับ	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$
โฟกัส	$(-c, 0), (c, 0); c^2 = a^2 + b^2$	$(0, -c), (0, c); c^2 = a^2 + b^2$
กราฟ		

เส้นกำกับ (asymptote) ที่กล่าวถึงข้างต้นคือ เส้นตรงที่ไฮเพอร์โบลาเข้าใกล้มากขึ้น ๆ เมื่อ $|x|$ และ $|y|$ มีค่ามากขึ้น ๆ ในการหาเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ จะแก้สมการเพื่อหา y ได้ดังนี้

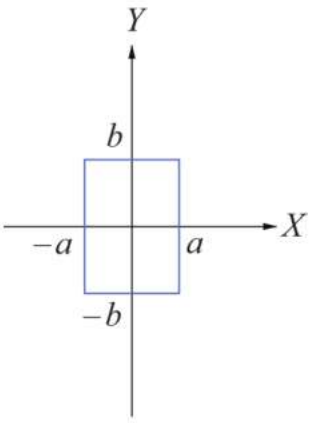
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

เมื่อ $|x|$ มีค่ามากขึ้น $\frac{a^2}{x^2}$ มีค่าใกล้ 0 มากขึ้น

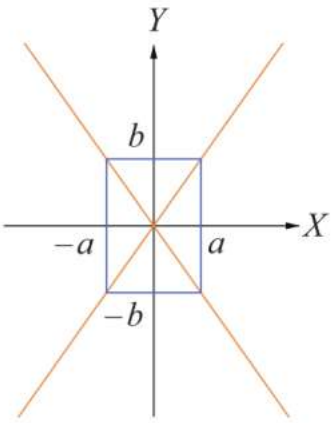
ดังนั้น สำหรับค่าของ x ซึ่ง $|x|$ มีค่ามาก ๆ ค่าของ y ประมาณได้ด้วย $y=\pm\frac{b}{a}x$ แสดงว่าเส้นตรง $y=\pm\frac{b}{a}x$ คู่นี้เป็นเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา

สำหรับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ คือ $y=\pm\frac{a}{b}x$ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

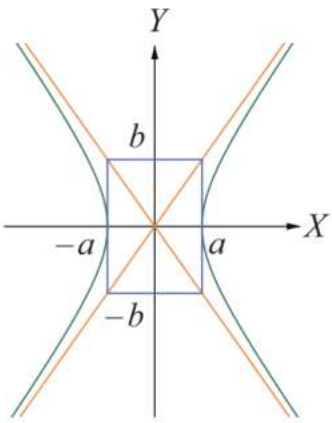
เส้นกำกับเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับช่วยในการเขียนไฮเพอร์โบลา เส้นกำกับช่วยกำหนดรูปร่างของไฮเพอร์โบลา การหาเส้นกำกับสำหรับไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ที่มีแกนตามขวางในแนวนอน สามารถทำได้โดยง่ายเพียงลงจุด $(-a, 0), (a, 0), (0, b)$ และ $(0, -b)$ แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยใช้จุดทั้งสี่นี้เป็นจุดกึ่งกลางด้าน ดังแสดงในรูปที่ 32ก เรียกรูปสี่เหลี่ยมนี้ว่า **รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากศูนย์กลาง (central rectangle)** ของไฮเพอร์โบลา เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้มีความชันเท่ากับ $\pm\frac{b}{a}$ ดังนั้น เมื่อต่อเส้นทแยงมุมออกไปจะได้เส้นกำกับ $y=\pm\frac{b}{a}x$ ดังแสดงในรูปที่ 32ข จากนั้นลงจุดยอดของไฮเพอร์โบลาแล้วลากเส้นโค้งจากจุดยอดลู่เข้าหาเส้นกำกับ จะได้ไฮเพอร์โบลาดังแสดงในรูปที่ 32ค



รูปที่ 32ก



รูปที่ 32ข



รูปที่ 32ค

ตัวอย่างที่ 37

ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $16x^2 - 9y^2 = 144$ จงหาจุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับ แล้วเขียนไฮเพอร์โบลา

วิธีทำ เขียนสมการไฮเพอร์โบลาในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ จะได้ $a^2 = 9$ และ $b^2 = 16$ นั่นคือ $a = 3$ และ $b = 4$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

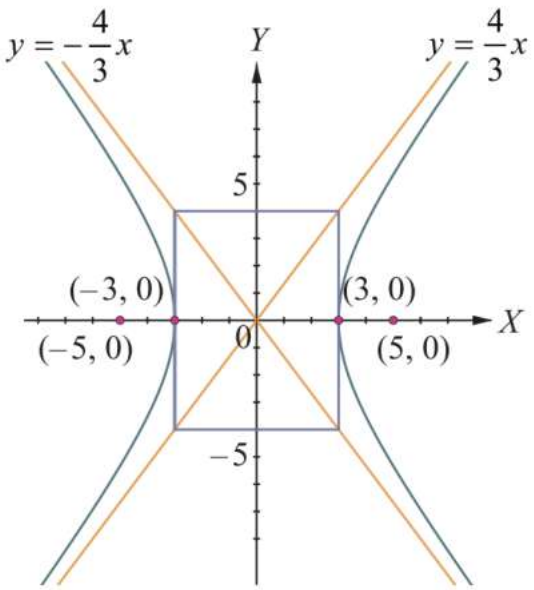
จาก $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+16} = 5$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

โฟกัส คือ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{4}{3}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 38

จงหาจุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $x^2-16y^2+16=0$ แล้วเขียนไฮเพอร์โบลา

วิธีทำ เขียนสมการไฮเพอร์โบลาในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$y^2-\frac{x^2}{16}=1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ จะได้ $a^2=1$ และ $b^2=16$ นั่นคือ $a=1$ และ $b=4$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

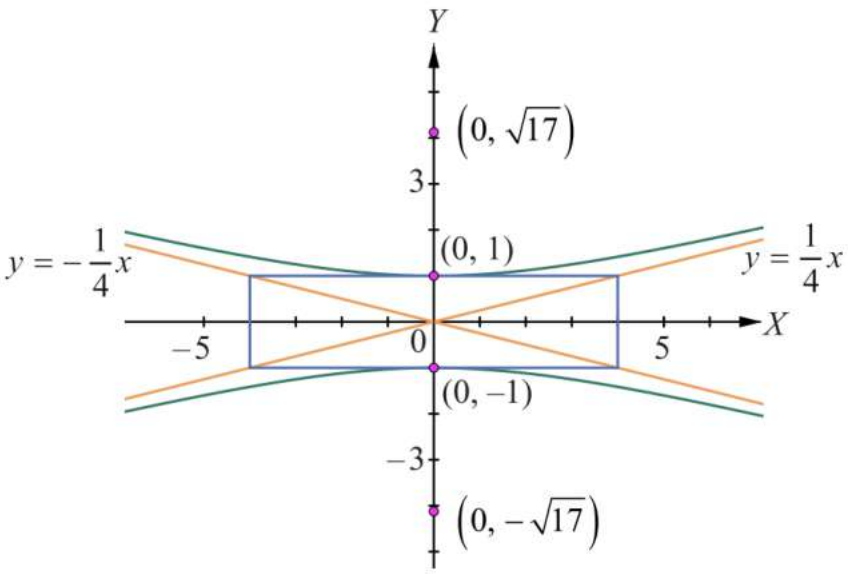
จาก $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(0,-1)$ และ $(0,1)$

โฟกัส คือ $\left(0,-\sqrt{17}\right)$ และ $\left(0,\sqrt{17}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm\frac{1}{4}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 39

จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุด $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ เป็นจุดยอด และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ แล้วเขียนไฮเพอร์โบลา

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $a = 2, c = 3$ และจุดยอดอยู่บนแกน X ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน และสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

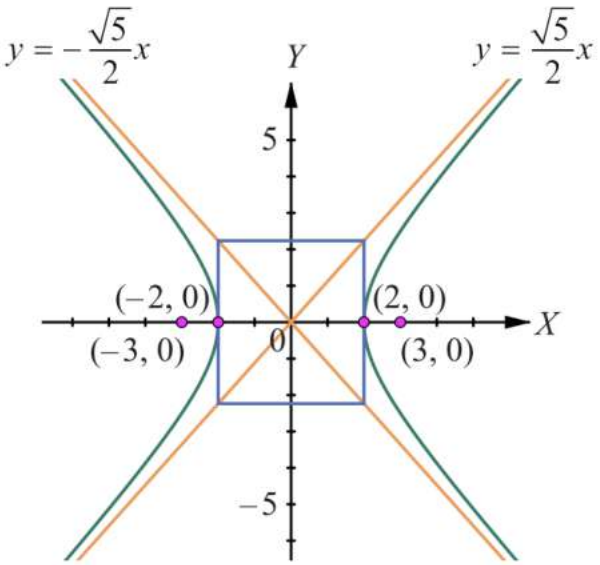
จาก $a^2 + b^2 = c^2$ แทน a และ c ด้วย 2 และ 3 ตามลำดับ

จะได้ $2^2 + b^2 = 3^2$

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 40

จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุด $(0,-2)$ และ $(0,2)$ เป็นจุดยอด และเส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm x$ แล้วเขียนไฮเพอร์โบลา

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่าจุดยอดอยู่บนแกน Y และ $a=2$ ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้งและมีเส้นกำกับอยู่ในรูป $y=\pm\frac{a}{b}x$

เนื่องจากเส้นกำกับ คือ $y=\pm x$ จะได้ $\frac{a}{b}=1$

แทน a ด้วย 2 จะได้

$$\frac{2}{b} = 1$$

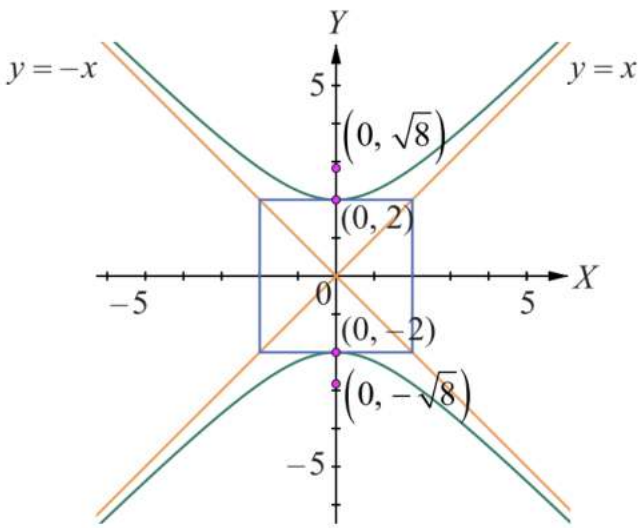
$$b = 2$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$

จาก $c^2=a^2+b^2$ แทน a และ b ด้วย 2

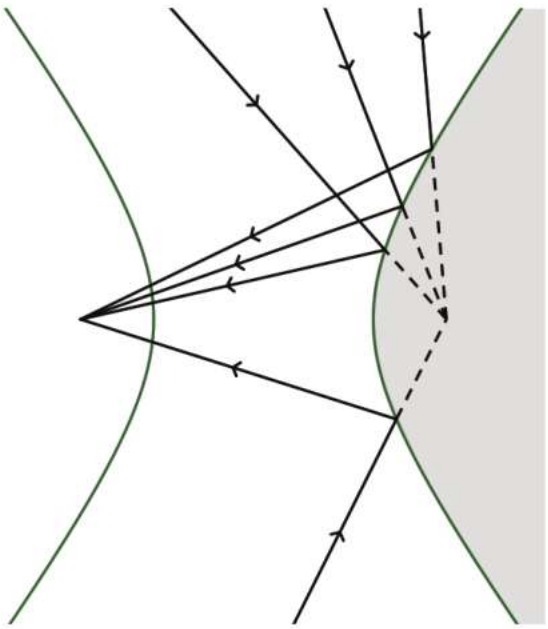
จะได้ $c^2=2^2+2^2=8$ นั่นคือ $c=\sqrt{8}$

ดังนั้น โฟกัส คือ $\left(0,-\sqrt{8}\right)$ และ $\left(0,\sqrt{8}\right)$ และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้

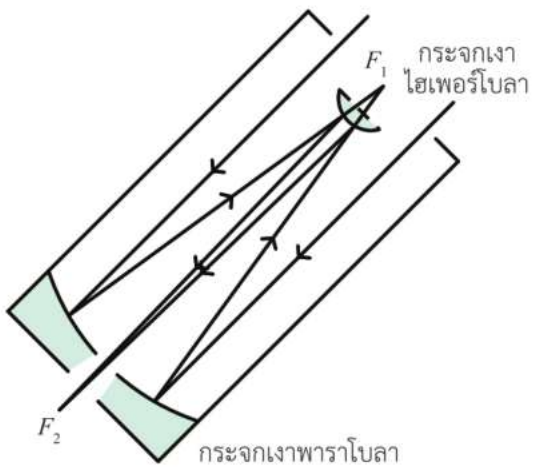


ข้อสังเกต ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$ มีเส้นกำกับ คือ $y=x$ และ $y=-x$ ซึ่งตั้งฉากกัน เรียกไฮเพอร์โบลาใด ๆ ที่มีเส้นกำกับตั้งฉากกันว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก (rectangular hyperbola)**

ไฮเพอร์โบลามีสมบัติการสะท้อนที่น่าสนใจเช่นเดียวกับพาราโบลาและวงรี สำหรับกระจกเงาที่มีภาคตัดขวางที่ผ่านแกนสมมาตรเป็นไฮเพอร์โบลา จะเรียกสั้น ๆ ว่า กระจกเงาไฮเพอร์โบลา เมื่อแสงที่มีทิศทางพุ่งไปที่โฟกัสจุดหนึ่งของกระจกเงากระทบกับกระจกเงา กระจกเงาจะสะท้อนแสงไปยังโฟกัสอีกจุดหนึ่ง ดังแสดงในรูปที่ 33 หลักการนี้ใช้สร้างกล้องโทรทรรศน์โดยการนำกระจกเงาไฮเพอร์โบลาวางในลำกล้องเพื่อทำหน้าที่สะท้อนแสงจากกระจกเงาที่มีภาคตัดขวางที่ผ่านแกนสมมาตรเป็นพาราโบลา ซึ่งเรียกสั้น ๆ ว่า กระจกเงาพาราโบลา ที่เข้ามาจากภายนอกอีกทีหนึ่ง แสงสะท้อนจากกระจกเงาพาราโบลามีทิศทางพุ่งไปยังโฟกัสจุดหนึ่ง (F_1) ของกระจกเงาไฮเพอร์โบลา และกระจกเงาไฮเพอร์โบลาจะสะท้อนแสงกลับไปยังโฟกัสอีกจุดหนึ่งที่อยู่ในตำแหน่งของนัยน์ตา (F_2) ดังแสดงในรูปที่ 34



รูปที่ 33



รูปที่ 34

แบบฝึกหัด 3.2.4

1. จงหาจุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา แล้วเขียนไฮเพอร์โบลา

1) $y^2 - x^2 = 1$

2) $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$

3) $x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$

4) $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$

5) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

6) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

7) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$

8) $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$

9) $y^2 - 2x^2 = 3$

10) $16x^2 - y^2 = 144$

11) $y^2 - x^2 - 4 = 0$

12) $9y^2 - 4x^2 = 36$

13) $25y^2 - 9x^2 = 225$

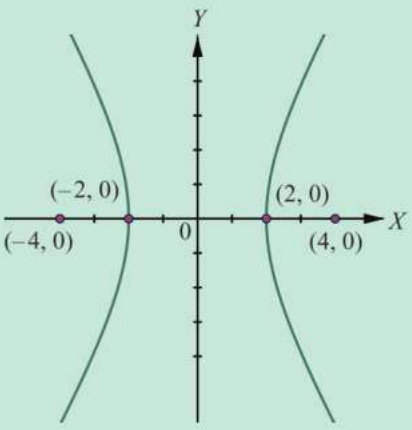
14) $9y^2 - 25x^2 = 225$

15) $9y^2 - 16x^2 = 1$

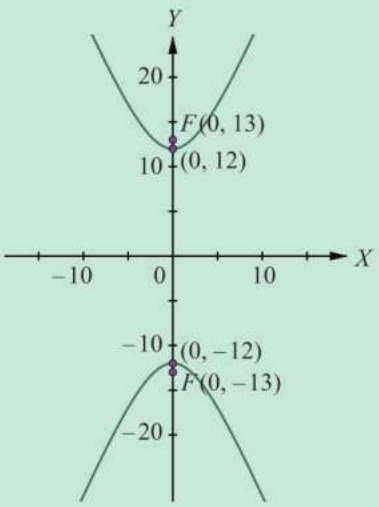
16) $y^2 - 4x^2 + 1 = 0$

2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งมีกราฟดังแสดงในแต่ละข้อ

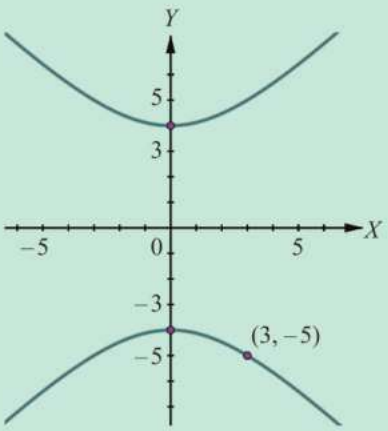
1)



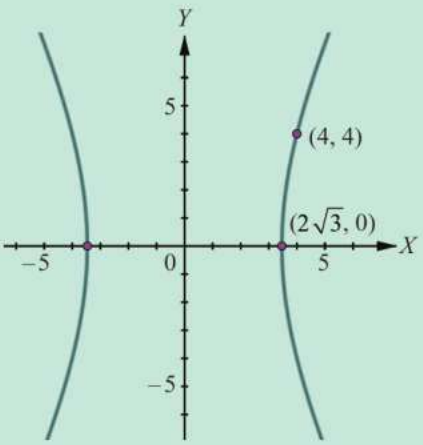
2)



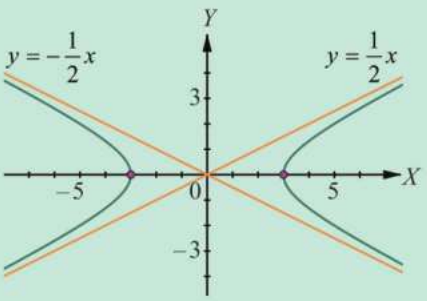
3)



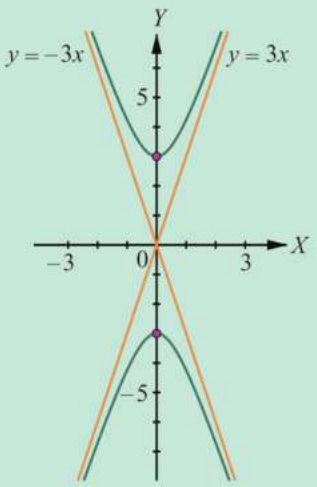
4)



5)



6)



3. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) โฟกัส คือ $(0,-5),(0,5)$ และจุดยอด คือ $(0,-3),(0,3)$

2) โฟกัส คือ $(-10,0),(10,0)$ และจุดยอด คือ $(-8,0),(8,0)$

3) โฟกัส คือ $(-2,0),(2,0)$ และจุดยอด คือ $(-1,0),(1,0)$

4) โฟกัส คือ $(0,-6),(0,6)$ และจุดยอด คือ $(0,-2),(0,2)$

5) จุดยอด คือ $(-1, 0), (1, 0)$ และเส้นกำกับ คือ $y = \pm 5x$

6) จุดยอด คือ $(0, -6), (0, 6)$ และเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{1}{3}x$

7) โฟกัส คือ $(0, -8), (0, 8)$ และเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{1}{2}x$

8) จุดยอด คือ $(0, -6), (0, 6)$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(-5, 9)$

9) เส้นกำกับ คือ $y = \pm x$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(5, 3)$

10) โฟกัส คือ $(-3, 0), (3, 0)$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(4, 1)$

11) โฟกัส คือ $(-5, 0), (5, 0)$ และแกนตามขวางยาว 6 หน่วย

12) โฟกัส คือ $(0, -1), (0, 1)$ และแกนตามขวางยาว 1 หน่วย

4. จงแสดงว่าเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 4$ ตั้งฉากกัน

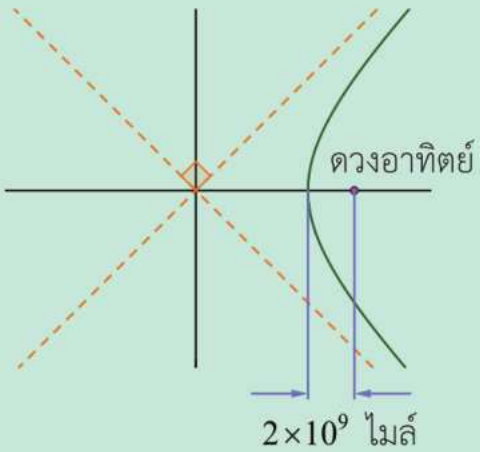
5. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัส $(-c, 0), (c, 0)$ และเส้นกำกับตั้งฉากกัน

6. จงยกตัวอย่างค้านสำหรับข้อความต่อไปนี้

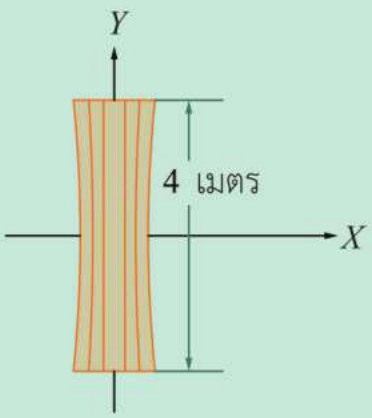
ถ้า $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลา แล้ว $a > b$

7. จงอธิบายว่ากราฟ $x^2 - \frac{y^2}{k^2} = 1$ เปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อค่า k เพิ่มขึ้น ในช่วง $(0, \infty)$

8. ดาวหางบางดวงโคจรผ่านเข้ามาในระบบสุริยะเพียงครั้งเดียว เส้นทางโคจรเป็นรูปไฮเพอร์โบลามุมฉากที่มีดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่ง รูปข้างล่างนี้แสดงเส้นทางของดาวหางประเภทนี้ จงหาสมการของเส้นทางโคจร ถ้าขณะที่ดาวหางโคจรเข้าใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด ดาวหางอยู่ห่างดวงอาทิตย์ 2×10^9 ไมล์

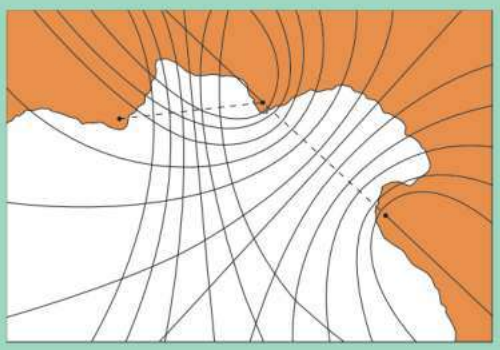


9. สถาปนิกออกแบบตึกให้มีเสาซึ่งมีภาคตัดขวางที่ผ่านแกนสมมาตรเป็นไฮเพอร์โบลา ส่วนโค้งของเสาสามารถจำลองด้วยสมการ $\frac{x^2}{(1/2)^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ ในหน่วยเมตร ถ้าเสามีความสูง 4 เมตร จงหาความกว้าง ณ ส่วนที่แคบที่สุดของเสาและความกว้างของส่วนบนของเสา



10. ภายใต้ระบบ LORAN เรือลำหนึ่งพบว่าผลต่างของระยะทางจากตำแหน่งที่เรืออยู่ไปยังสถานีวิทยุสองแห่งเป็น 50 ไมล์ทะเล หากสถานีวิทยุสองแห่งตั้งอยู่ห่างกัน 100 ไมล์ทะเล จงเขียนสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งแสดงตำแหน่งทั้งหมดของเรือที่เป็นไปได้ เมื่อกำหนดให้สถานีวิทยุอยู่ที่จุด $(-50, 0)$ และ $(50, 0)$

เสริมสมอง : LORAN



LORAN (long range navigation) เป็นระบบการหาตำแหน่งเรือซึ่งพัฒนาขึ้นโดยสหรัฐอเมริกาในช่วงสงครามโลกครั้งที่สอง โดยพิจารณาจากช่วงระยะเวลาของจุดที่ส่งและรับสัญญาณวิทยุเมื่อสถานีสองแห่งปล่อยสัญญาณออกมาพร้อมกัน ระยะทางที่แตกต่างกันจากตัวเรือถึงสถานีทั้งสองจะทำให้เวลาที่สัญญาณวิทยุจากแต่ละสถานีเดินทางมาถึงเรือแตกต่างกัน แม้ว่าจะไม่สามารถระบุระยะห่างจากเรือถึงสถานีวิทยุแต่ละแห่งได้ แต่ค่าความต่างของเวลาที่สัญญาณวิทยุจากสถานีส่งสองแห่งเดินทางมาถึงเครื่องรับจะให้เส้นซึ่งแสดงแนวตำแหน่งที่ตั้งทั้งหมดของเรือที่เป็นไปได้ โดยใช้บทนิยามของไฮเพอร์โบลาที่เป็นเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองมีค่าคงตัว ซึ่งตำแหน่งที่แน่นอนของเรือจะสามารถหาได้จากจุดตัดของเส้นโค้งสองเส้น นั่นหมายความว่าในการหาตำแหน่งของเรือนั้นต้องอาศัยสถานีส่งสองคู่ (สถานีส่งอย่างน้อยสามแห่ง)

11. หน่วยย่อยของเจ้าหน้าที่ป่าไม้สองหน่วยตามรอยโขลงช้างอยู่ในป่า ทั้งสองหน่วยอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร

1) ถ้าหน่วยย่อยหน่วยหนึ่งได้ยินเสียงปืนของกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ก่อนอีกหน่วยย่อยหนึ่งเป็นระยะเวลา 4 วินาที จงเขียนสมการอธิบายตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ ให้ตำแหน่งของหน่วยย่อยทั้งสองอยู่บนแกน X โดยให้จุดกำเนิดเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างหน่วยย่อยทั้งสอง (เสียงมีความเร็วประมาณ 0.35 กิโลเมตรต่อวินาที)

2) จงเขียนกราฟของตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ และระบุตำแหน่งของเจ้าหน้าที่ป่าไม้ทั้งสองหน่วย

3.2.5 การเลื่อนกราฟ

ในหัวข้อที่ 3.2.2 ถึง 3.2.4 ได้ศึกษาพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด วงรีและไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว สมการของภาคตัดกรวยทั้งสามชนิดมีรูปแบบมาตรฐาน สำหรับหัวข้อนี้จะศึกษาภาคตัดกรวยที่มีจุดยอดและจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดใด ๆ และจะศึกษาผลที่เกิดขึ้นกับสมการของภาคตัดกรวยเหล่านั้นด้วย

จากที่ได้ศึกษามาแล้วเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของฟังก์ชันตามแนวแกนซึ่งมีผลทำให้สมการของฟังก์ชันเปลี่ยนไป ในกรณีทั่วไป สำหรับสมการใด ๆ ถ้าแทน x ด้วย $x-h$ หรือ $x+h$ กราฟของสมการใหม่คือ กราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวนอน ถ้าแทน y ด้วย $y-k$ หรือ $y+k$ กราฟของสมการใหม่คือ กราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวตั้ง สรุปสาระสำคัญได้ดังนี้

การเลื่อนกราฟของสมการ

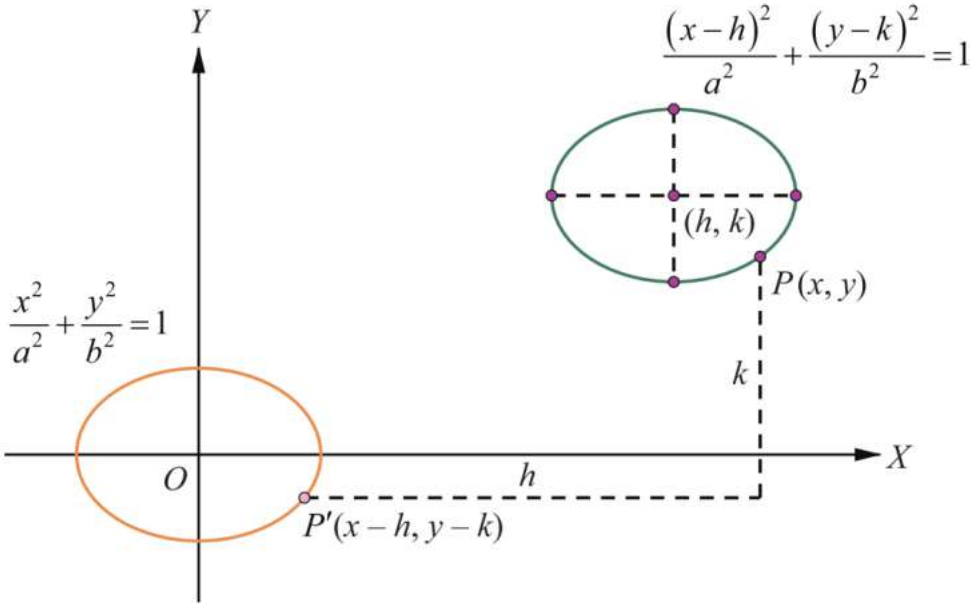
ถ้า h และ k เป็นจำนวนจริงบวก แล้วการแทน x ด้วย $x-h$ หรือ $x+h$ และการแทน y ด้วย $y-k$ หรือ $y+k$ จะมีผลต่อกราฟของสมการใด ๆ ในตัวแปร x และ y ดังนี้

วิธีการแทน	กราฟเลื่อนไปอย่างไร
1. แทน x ด้วย $x-h$	ทางขวา h หน่วย
2. แทน x ด้วย $x+h$	ทางซ้าย h หน่วย
3. แทน y ด้วย $y-k$	ขึ้นบน k หน่วย
4. แทน y ด้วย $y+k$	ลงล่าง k หน่วย

ตัวอย่างเช่น วงรีที่มีสมการ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

มีกราฟดังแสดงในรูปที่ 35 ถ้าเลื่อนวงรีรูปนี้ให้จุดศูนย์กลางของวงรีไปอยู่ที่ (h,k)

แล้วสมการวงรีรูปใหม่จะเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



รูปที่ 35

ตัวอย่างที่ 41

จงเขียนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดให้ จะได้ว่าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,-2)$ ซึ่งเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 2 หน่วย จุดปลายของแกนเอกและแกนโทของวงรี $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ คือ $(0,3),(0,-3)$ และ $(2,0),(-2,0)$ ตามลำดับ

ถ้าเลื่อนจุดเหล่านี้ไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 2 หน่วย จะได้จุดปลายของแกนเอกและแกนโทของวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ ดังนี้

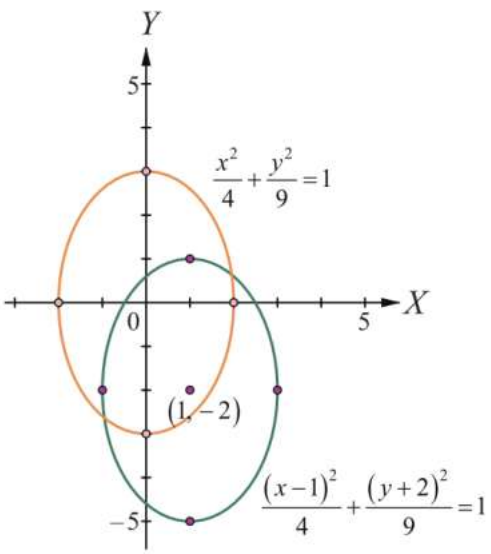
$(0,3)$ เลื่อนไปยังจุด $(0+1,3-2)=(1,1)$

$(0,-3)$ เลื่อนไปยังจุด $(0+1,-3-2)=(1,-5)$

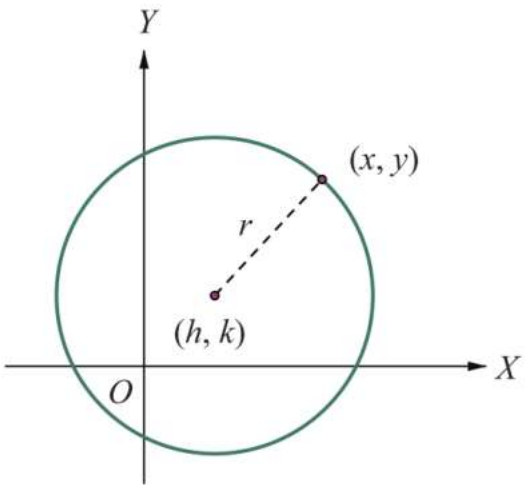
$(2,0)$ เลื่อนไปยังจุด $(2+1,0-2)=(3,-2)$

$(-2,0)$ เลื่อนไปยังจุด $(-2+1,0-2)=(-1,-2)$

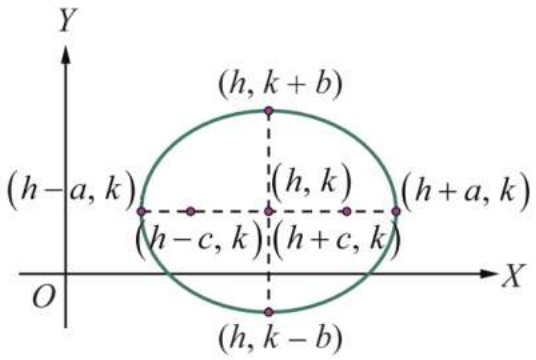
นำจุดเหล่านี้เป็นข้อมูลเขียนวงรีทั้งสอง ดังรูป



อาศัยหลักการเลื่อนกราฟ สามารถสรุปเกี่ยวกับกราฟและสมการของภาคตัดกรวยแต่ละชนิดได้ดังตารางต่อไปนี้

ภาคตัดกรวยและกราฟ	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
วงกลม (ดูหัวข้อ 3.2.1)	
	สมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ จุดศูนย์กลาง (h, k) รัศมียาว r หน่วย

วงรี (ดูหัวข้อ 3.2.2)



สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ a>b>0$

แกนเอกอยู่ในแนวนอน

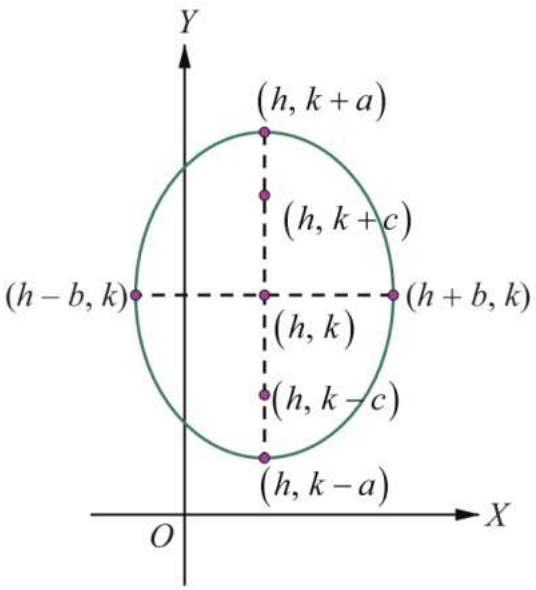
จุดศูนย์กลาง (h,k)

จุดยอด $(h-a,k),(h+a,k)$

โฟกัส $(h-c,k),(h+c,k);\ c^2=a^2-b^2$

แกนเอกยาว $2a$ หน่วย

แกนโทยาว $2b$ หน่วย



สมการ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1,\ a>b>0$

แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง (h,k)

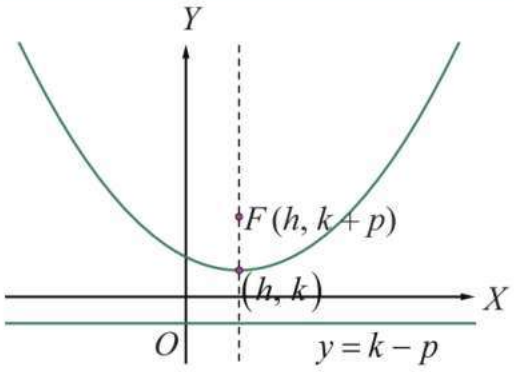
จุดยอด $(h,k-a),(h,k+a)$

โฟกัส $(h,k-c),(h,k+c);\ c^2=a^2-b^2$

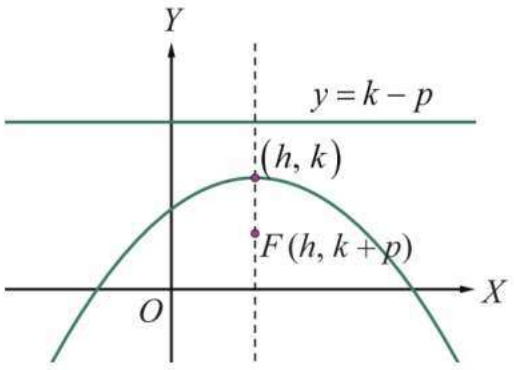
แกนเอกยาว $2a$ หน่วย

แกนโทยาว $2b$ หน่วย

พาราโบลา (ดูหัวข้อ 3.2.3)



$p > 0$



$p < 0$

สมการ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

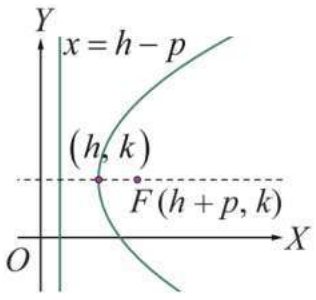
จุดยอด (h, k)

โฟกัส $(h, k+p)$

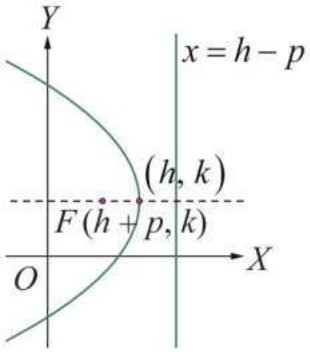
ไดเรกตริกซ์ $y = k - p$

$p > 0$ เส้นโค้งหงายขึ้น

$p < 0$ เส้นโค้งคว่ำลง



$p > 0$



$p < 0$

สมการ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน

จุดยอด (h, k)

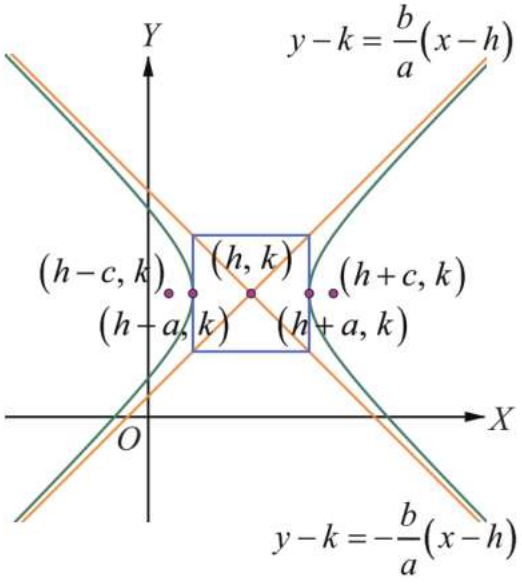
โฟกัส $(h+p, k)$

ไดเรกตริกซ์ $x = h - p$

$p > 0$ เส้นโค้งเปิดด้านขวา

$p < 0$ เส้นโค้งเปิดด้านซ้าย

ไฮเพอร์โบลา (ดูหัวข้อ 3.2.4)



สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$(a>0, b>0)$

แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง (h,k)

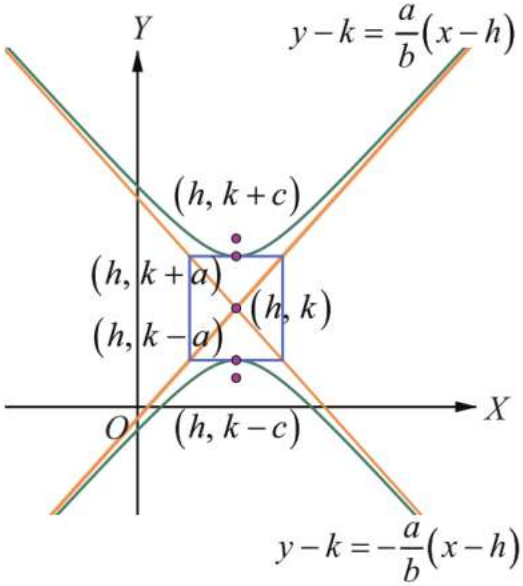
จุดยอด $(h-a,k), (h+a,k)$

โฟกัส $(h-c,k), (h+c,k)$; $c^2=a^2+b^2$

แกนตามขวางยาว $2a$ หน่วย

แกนสังยุคยาว $2b$ หน่วย

สมการเส้นกำกับ คือ $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$



สมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

$(a>0, b>0)$

แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง (h,k)

จุดยอด $(h,k-a), (h,k+a)$

โฟกัส $(h,k-c), (h,k+c)$; $c^2=a^2+b^2$

แกนตามขวางยาว $2a$ หน่วย

แกนสังยุคยาว $2b$ หน่วย

สมการเส้นกำกับ คือ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

ตัวอย่างที่ 42

จงหาจุดยอด โฟกัส และไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $y^2-4y=8x-28$ แล้วเขียนพาราโบลา

วิธีทำ จัดสมการพาราโบลาที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ดังนี้

$$\begin{aligned} y^2-4y &= 8x-28 \\ y^2-4y+4 &= 8x-28+4 \\ (y-2)^2 &= 8x-24 \\ (y-2)^2 &= 8(x-3) \qquad \text{-------}\ (1) \end{aligned}$$

จากสมการ (1) เมื่อเทียบกับสมการ $(y-k)^2=4p(x-h)$

จะได้ $h=3, k=2$ และ $4p=8$ นั่นคือ $p=2$

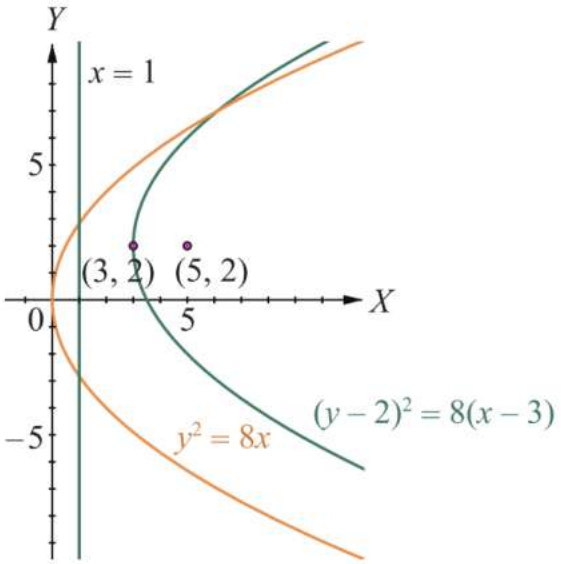
ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดด้านขวา

จุดยอด คือ $(h,k)=(3,2)$

โฟกัส คือ $(h+p,k)=(5,2)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x=h-p$ หรือ $x=1$

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 43

ภาคตัดกรวยรูปหนึ่งมีสมการเป็น $9y^2-72y-16x^2-32x=16$

1) จงแสดงว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา

2) จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส เส้นกำกับ และเขียนกราฟ

วิธีทำ 1) จัดสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ดังนี้

$$9\left(y^2-8y\right)-16\left(x^2+2x\right) = 16$$

$$9\left(y^2-8y+16\right)-16\left(x^2+2x+1\right) = 16+9(16)-16(1)$$

$$9\left(y-4\right)^2-16\left(x+1\right)^2 = 144$$

$$\frac{(y-4)^2}{16}-\frac{(x+1)^2}{9} = 1 \qquad \text{-------}\ (1)$$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

2) จากสมการ (1) เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้ $h=-1, k=4, a=4, b=3$ และ $c=\sqrt{16+9}=5$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(h,k)=(-1,4)$

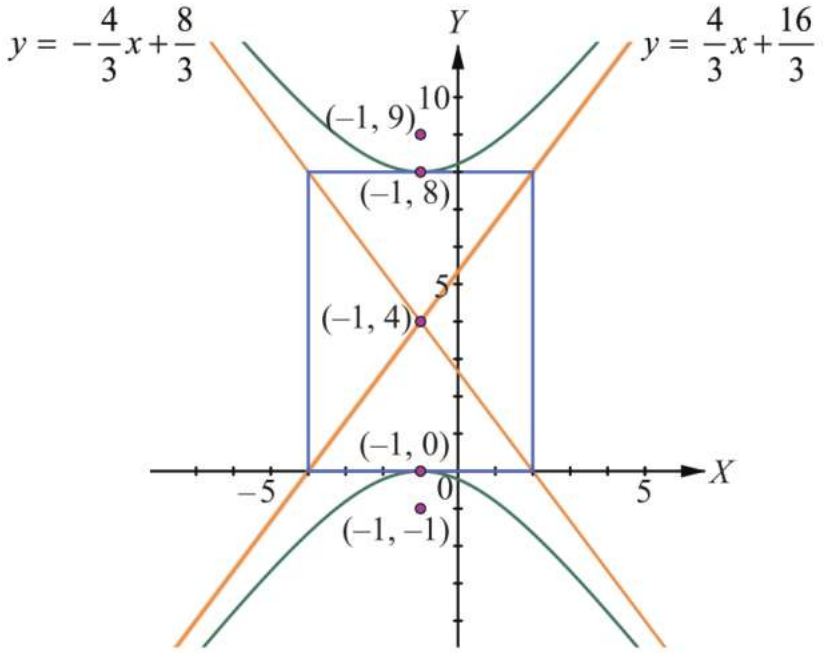
จุดยอด คือ $(h,k-a)$ และ $(h,k+a)$ หรือ $(-1,0)$ และ $(-1,8)$

โฟกัส คือ $(h,k-c)$ และ $(h,k+c)$ หรือ $(-1,-1)$ และ $(-1,9)$

เส้นกำกับ คือ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$ หรือ $y-4=\pm\frac{4}{3}(x+1)$ หรือ

$y=\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$ และ $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



ถ้ากระจายสมการของภาคตัดกรวยใด ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้ว และเขียนในรูปแบบอย่างง่าย จะได้สมการในรูปแบบต่อไปนี้เสมอ

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

เมื่อ A และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และในทางกลับกัน ถ้าเริ่มต้นจากสมการในรูปแบบนี้ จัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นสมการของภาคตัดกรวยชนิดใด ในบางกรณี กราฟของสมการอาจเป็นเพียงเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน จุดหนึ่งจุด หรืออาจไม่มีกราฟเลยก็ได้ กรณีเหล่านี้เรียกว่า **ภาคตัดกรวยลดรูป** ดังตัวอย่างถัดไป

ตัวอย่างที่ 44

จงเขียนกราฟของ $9y^2 - x^2 + 18y + 6x = 0$

วิธีทำ เนื่องจากผลคูณของสัมประสิทธิ์ของ y^2 และ x^2 เป็นจำนวนจริงลบ สมการนี้น่าจะเป็นสมการไฮเพอร์โบลา ในการพิจารณาว่าข้อสันนิษฐานนี้ถูกต้องหรือไม่ จะทำสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้

$$\begin{aligned} 9\left(y^2+2y\right)-\left(x^2-6x\right) &= 0 \\ 9\left(y^2+2y+1\right)-\left(x^2-6x+9\right) &= 0+9-9 \\ 9\left(y+1\right)^2-\left(x-3\right)^2 &= 0 \\ \left(y+1\right)^2-\frac{\left(x-3\right)^2}{9} &= 0 \qquad \text{------- } (1) \end{aligned}$$

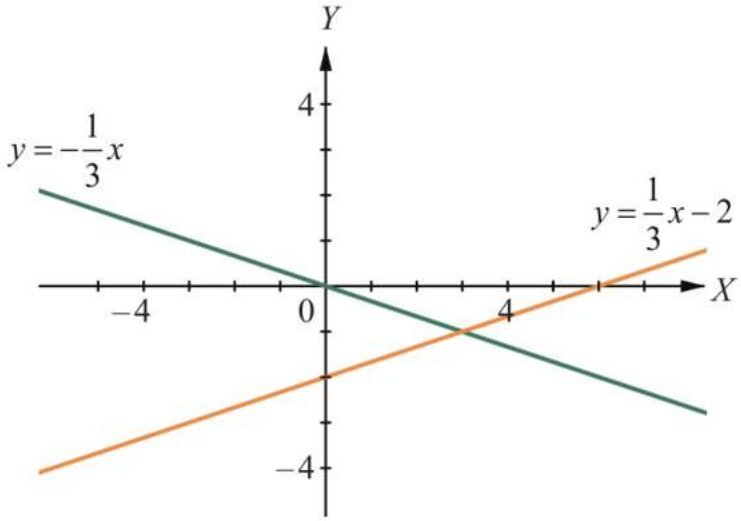
สังเกตว่า จำนวนข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับเป็น 0 จึงไม่สามารถเขียนสมการใหม่ให้ตรงกับรูปแบบของสมการไฮเพอร์โบลาที่ได้ศึกษามาแล้ว เมื่อวิเคราะห์ต่อไปจะพบว่า สมการดังกล่าวเป็นสมการของเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน

จากสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned} \left(y+1\right)^2 &= \frac{1}{9}\left(x-3\right)^2 \\ y+1=\frac{1}{3}\left(x-3\right) \text{ หรือ } y+1&=-\frac{1}{3}\left(x-3\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $y=\frac{1}{3}x-2$ หรือ $y=-\frac{1}{3}x$

เขียนกราฟของเส้นตรงทั้งสองได้ดังนี้



เนื่องจากสมการในตัวอย่างที่ 44 ดูคล้ายกับสมการไฮเพอร์โบลา แต่ความจริงเป็นสมการของเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน จึงเรียกกราฟของสมการนี้ว่า **ไฮเพอร์โบลาลดรูป (degenerate hyperbola)** วงรีลดรูปและพาราโบลาลดรูปก็เกิดขึ้นได้เมื่อจัดรูปแบบของสมการที่ดูเหมือนจะเป็นสมการของภาคตัดกรวยโดยทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เช่น สมการ

$$x^2+4y^2+2x-8y+6 = 0$$

ดูคล้ายจะเป็นสมการวงรี เพราะว่าผลคูณของสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 เป็นจำนวนจริงบวก แต่เมื่อทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะได้

$$(y-1)^2+\frac{(x+1)^2}{4}=-\frac{1}{4}$$

ซึ่งเป็นสมการที่ไม่มีคำตอบ เนื่องจากผลบวกของกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ เป็นจำนวนจริงลบไม่ได้ สมการนี้เป็นสมการวงรีลดรูป

สรุปสาระสำคัญเกี่ยวกับสมการรูปแบบทั่วไปของภาคตัดกรวยได้ดังนี้

สมการรูปแบบทั่วไปของภาคตัดกรวย

กราฟของสมการ $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ A และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เป็นภาคตัดกรวยหรือภาคตัดกรวยลดรูป ในกรณีที่ไม่ใช่ภาคตัดกรวยลดรูป กราฟของสมการเป็น

1. วงกลม เมื่อ $A = C$
2. วงรี เมื่อ $AC > 0$
3. พาราโบลา เมื่อ $AC = 0$
4. ไฮเพอร์โบลา เมื่อ $AC < 0$

หมายเหตุ ในการศึกษาระดับสูงขึ้นไป จะพบว่ารูปแบบทั่วไปของสมการของภาคตัดกรวยอยู่ในรูป $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ A, B และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ซึ่งพจน์ Bxy สามารถทำให้หายไปได้ด้วยหลักการหมุนแกน ซึ่งจะยังไม่ศึกษาในระดับนี้

แบบฝึกหัด 3.2.5

1. จงหาจุดศูนย์กลาง โฟกัส จุดยอดของวงรี ความยาวของแกนเอก และความยาวของแกนโท แล้วเขียนกราฟ

   1) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

   2) $(y+3)^2+\frac{(x-3)^2}{16}=1$

   3) $\frac{y^2}{9}+\frac{(x+5)^2}{25}=1$

   4) $x^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

2. จงหาจุดยอด โฟกัส และไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา แล้วเขียนกราฟ

   1) $(x-3)^2=8(y+2)$

   2) $(y-5)^2=-6x+12$

   3) $-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=y$

   4) $y^2=16x+8$

3. จงหาจุดศูนย์กลาง โฟกัส จุดยอด และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา แล้วเขียนกราฟ

   1) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$

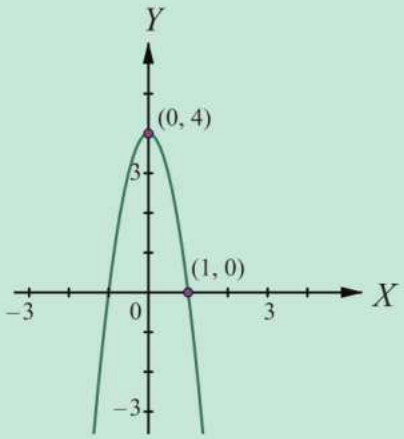
   2) $(x+8)^2-(y-6)^2=1$

   3) $y^2-\frac{(x-1)^2}{4}=1$

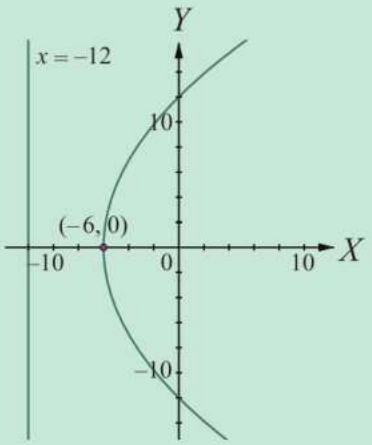
   4) $\frac{(y-1)^2}{25}-(x-3)^2=1$

4. จงหาสมการของภาคตัดกรวยซึ่งมีกราฟต่อไปนี้

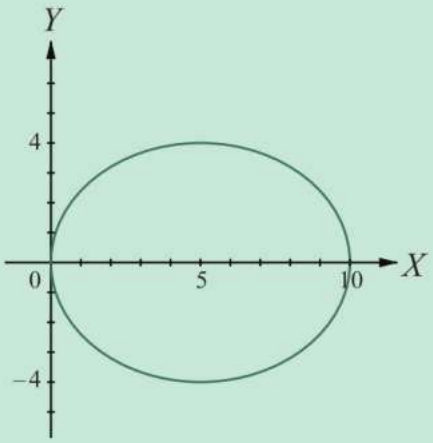
1)



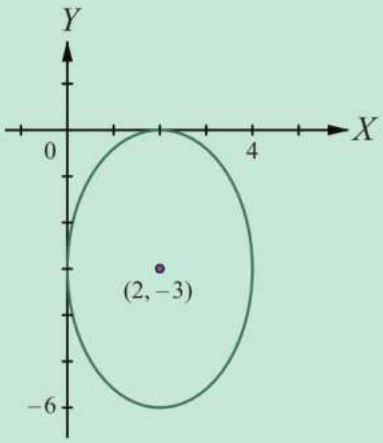
2)



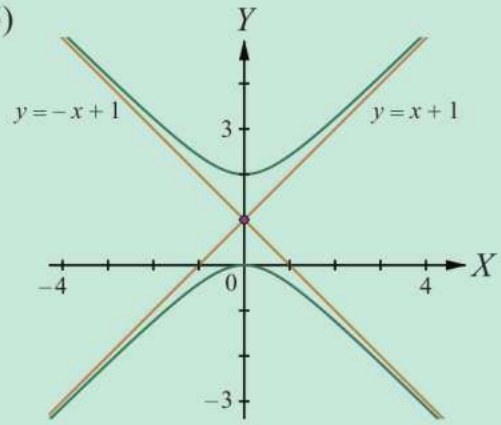
3)



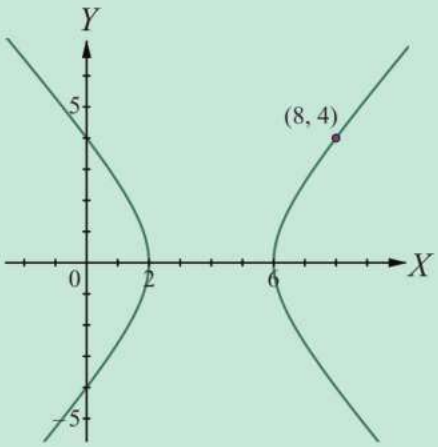
4)



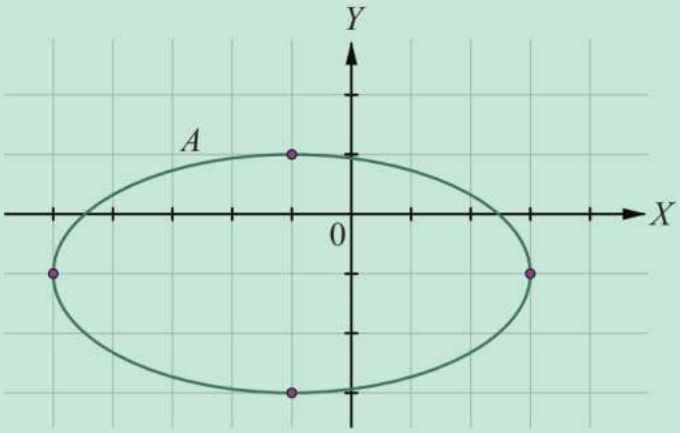
5)



6)



5. กำหนดวงรี A



1) จงระบุจุดศูนย์กลางของวงรี ความยาวของแกนเอก และความยาวของแกนโทของวงรี A

2) จงอธิบายว่าต้องเลื่อนขนานกราฟของ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ อย่างไร จึงจะได้วงรี A

3) จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี A โดยอาศัยข้อมูลจากข้อ 2)

6. จงพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้มีกราฟเป็นวงรี พาราโบลา ไฮเพอร์โบลา หรือภาคตัดกรวยลดรูป ถ้ากราฟเป็นวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวของแกนเอก และความยาวของแกนโท ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาจุดยอด โฟกัส และไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นไฮเพอร์โบลา จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับ แล้วเขียนกราฟของสมการ ถ้าสมการไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง จงบอกเหตุผล

1) $9y^2-36y+4x^2=0$

2) $x^2=4(y+2x)$

3) $y^2-4x^2-2y+16x=20$

4) $x^2+6x-12y+9=0$

5) $4x^2+25y^2-24x+250y+561=0$

6) $2y^2+x^2=2x+1$

7) $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

8) $4y^2 - 4y - 8x + 9 = 0$

9) $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

10) $x^2 + 16 = 4\left(y^2 + 2x\right)$

11) $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

12) $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y + 300 = 0$

7. จงเขียนกราฟของสมการต่อไปนี้โดยใช้เครื่องคำนวณหรือเครื่องคิดเลขกราฟิก

1) $2y^2 - 4y + x + 5 = 0$

2) $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

3) $9y^2 + 36 = x^2 + 36y + 6x$

4) $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y = 0$

8. จงหาค่าของ F ถ้ากราฟของสมการ $4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$ เป็น

1) วงรี

2) จุดจุดเดียว

3) เซตว่าง

9. จงหาสมการวงรีที่มีจุดยอดและโฟกัสจุดหนึ่งร่วมกับพาราโบลา $y^2 + x = 100$ และโฟกัสอีกจุดหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ให้ X แทนอุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียส และให้ Y แทนอุณหภูมิในหน่วยองศาฟาเรนไฮต์ โดยที่อุณหภูมิ $0^\circ C$ เท่ากับ $32^\circ F$ และอุณหภูมิ $100^\circ C$ เท่ากับ $212^\circ F$ จงหาสมการของเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างองศาเซลเซียสและองศาฟาเรนไฮต์ในรูป $y = mx + b$

2. ให้ ℓ_1 เป็นเส้นตรงที่กำหนดโดยสมการ $4y - x + 17 = 0$ และให้ ℓ_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และตั้งฉากกับ ℓ_1 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 และแกน X

3. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(2, -5)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

4. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(-5, 1)$ และผ่านจุดกำเนิด

5. จงหาสมการวงกลมที่มี $P(2, 3)$ และ $Q(-1, 8)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง

6. จงเขียนกราฟของอาณาบริเวณซึ่งกำหนดโดยเซตต่อไปนี้
   1) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$
   2) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 > 9\}$

7. จงเขียนกราฟของอาณาบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการ $x^2 + y^2 \leq 9$ และ $y \geq |x|$ แล้วจงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณนี้

8. จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 13$ ที่จุด $(-3, -2)$

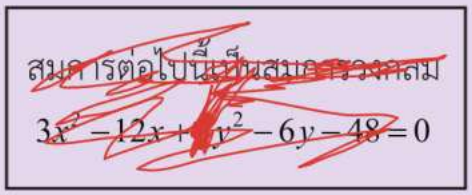
9. จงหาสมการของเส้นตรงแต่ละเส้นที่สัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

1) ผ่านจุด $(3,0)$

2) มีความชันเป็น -1

3) สัมผัสวงกลม $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ แต่ไม่ตัดวงกลม $(x+3)^2+(y+3)^2=9$

10. สมมตินักเรียนอ่านหนังสือเตรียมสอบ แล้วพบว่าน้องสาวได้ขีดเขียนหนังสือเรียนจนเลอะเทอะดังภาพ



จงระบุสัมประสิทธิ์ของ y^2 ที่มองไม่เห็นในสมการ

11. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวของแกนเอก และความยาวของแกนโทของวงรี แล้วเขียนกราฟ

1) $x^2+4y^2=16$

2) $9x^2+4y^2=1$

3) $4x^2+9y^2=36y$

4) $2x^2+y^2=2+4(x-y)$

12. จงหาจุดยอด โฟกัส และไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา แล้วเขียนกราฟ

1) $x^2+8y=0$

2) $2x-y^2=0$

3) $x-y^2+4y-2=0$

4) $2x^2+6x+5y+10=0$

13. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส และสมการของเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา แล้วเขียนกราฟ

1) $x^2 - 2y^2 = 16$

2) $x^2 - 4y^2 = -16$

3) $9y^2 + 18y = x^2 + 6x + 18$

4) $y^2 = x^2 + 6y$

14. จงพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้มีกราฟเป็นวงรี พาราโบลา ไฮเพอร์โบลา หรือภาคตัดกรวยลดรูป ถ้ากราฟเป็นวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัส ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาจุดยอด และโฟกัส ถ้ากราฟเป็นไฮเพอร์โบลา จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัส แล้วเขียนกราฟของสมการ

1) $\frac{y^2}{12} + x = 1$

2) $\frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{144} = \frac{y}{12}$

3) $x^2 - y^2 + 144 = 0$

4) $x^2 + 6x = 9y^2$

5) $4x^2 + y^2 = 8(x + y)$

6) $3x^2 - 6(x + y) = 10$

7) $2x^2 + 4 = 4x + y^2$

8) $2x^2 - 12x + y^2 + 6y + 26 = 0$

9) $36x^2 - 4y^2 - 36x - 8y = 31$

10) $x^2 + 4y^2 = 4x + 8$

15. จงพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้มีกราฟเป็นวงกลม วงรี พาราโบลา หรือไฮเพอร์โบลา ถ้ากราฟเป็นวงกลม จงหาจุดศูนย์กลาง และความยาวของรัศมี ถ้ากราฟเป็นวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง ความยาวของแกนเอก และความยาวของแกนโท ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาจุดยอด โฟกัส และไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นไฮเพอร์โบลา จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัส แล้วเขียนกราฟของสมการ

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

2) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

3) $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

4) $y^2 - 4y - 4x = 0$

5) $4x^2+3y^2+8x-24y+51=0$
6) $4y^2-2x^2-4y-8x-15=0$
7) $25x^2-10x-200y-119=0$
8) $4x^2+4y^2-16y+15=0$
9) $4x^2-y^2+8x-6y+4=0$
10) $2x^2+2y^2-8x+12y+2=0$

16. จงหาสมการของภาคตัดกรวยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) พาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,1)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y=-1$
2) วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(0,4)$ โฟกัส คือ $F_1(0,0)$ และ $F_2(0,8)$ และแกนเอกยาว 10 หน่วย
3) ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(0,-2), V_2(0,2)$ และเส้นกำกับ คือ $y=\pm\frac{1}{2}x$
4) ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(2,4)$ โฟกัส คือ $F_1(2,1)$ และ $F_2(2,7)$ จุดยอด คือ $V_1(2,6)$ และ $V_2(2,2)$
5) วงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(1,1)$ และ $F_2(1,3)$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนแกน X
6) พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(5,5)$ และแกน Y เป็นไดเรกตริกซ์
7) วงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(7,12)$ และ $V_2(7,-8)$ และผ่านจุด $P(1,8)$
8) พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(-1,0)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน และมีระยะตัดแกน Y เท่ากับ 2 และ –2

17. จงหาสมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด $P(x,y)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

1) ระยะห่างจากจุด $(7,2)$ เป็น 5 หน่วย
2) ระยะห่างจากจุด $(-3,2)$ และ $(-3,8)$ รวมกันเป็น 10 หน่วย
3) ระยะห่างจากจุด $(2,2)$ และระยะห่างจากเส้นตรง $y=4$ เท่ากัน
4) ระยะห่างจากจุด $(0,5)$ และ $(10,5)$ ต่างกัน 8 หน่วย

18. จงเขียนภาคตัดกรวยที่กำหนดให้ในรูปเซตของคู่อันดับที่มีเงื่อนไขเป็นสมการในรูปแบบมาตรฐาน พร้อมทั้งระบุว่าเซตดังกล่าวเป็นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1) จุดทั้งหมดที่มีระยะห่างจากจุด $(0,1)$ และระยะห่างจากเส้นตรง $y=-1$ เท่ากัน

2) จุดทั้งหมดที่อยู่บนวงกลมที่มีส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(7,5)$ และ $(11,3)$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

3) จุดทั้งหมดที่มีผลต่างของระยะห่างจากจุด $(1,3)$ และ $(1,9)$ เป็น 4 หน่วย

4) จุดทั้งหมดที่มีผลรวมของระยะห่างจากจุด $(-1,-1)$ และ $(11,-1)$ เป็น 26 หน่วย

19. วงกลม C มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(5,3)$ และรัศมียาว 5 หน่วย

1) จงหาสมการวงกลม C

✪ 2) จงหาจำนวนพิกัด $(x,y)\in C$ ทั้งหมดที่ x และ y เป็นจำนวนเต็ม

20. จงหาสมการวงรีที่มีโฟกัสเป็นจุดยอดทั้งสองของ $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$ และมีจุดยอดเป็นโฟกัสทั้งสองของ $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$

✪ 21. ให้จุด F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของวงรี $4x^2-4x+my^2=8$ และให้จุดตัดแกน X ทางด้านบวกที่จุด A จะได้รูปสามเหลี่ยม F_1F_2A จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้ในรูปของ m

22. จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $y=-x$ กับวงกลม $(x-3)^2+y^2=9$ ทั้งสองจุด และมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

23. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นซึ่งมีความชันเท่ากับ 1 และเส้นตรงแต่ละเส้นผ่านโฟกัสแต่ละจุดของไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{(x-3)^2}{49}-\frac{(y+4)^2}{576}=1$

24. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของ $x^2-6x=6-2y-y^2$ และโฟกัสของ $y^2-8x=4$

25. จงหาสมการวงรีที่ผ่านจุดยอดของ $2y^2-x=4$ และมีจุดปลายของเลตัสเรกตัมของ $2y^2-x=4$ เป็นโฟกัส

26. จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้มีกราฟเป็นวงกลม จุดหนึ่งจุด หรือไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง ถ้าเป็นสมการวงกลม จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมี

1) $x^2+y^2+2x-6y+9=0$
2) $2x^2+2y^2-2x+8y=\frac{1}{2}$
3) $x^2+y^2+72=12x$
4) $x^2+y^2-6x-10y+34=0$

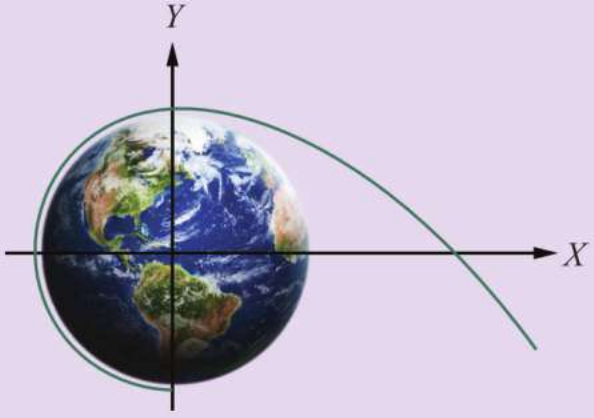
27. จงระบุว่าสมการต่อไปนี้มีกราฟเป็นพาราโบลา วงรี วงกลม ไฮเพอร์โบลา จุดหนึ่งจุด เส้นตรงสองเส้นตัดกัน หรือไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง

1) $-3x^2+y+2=0$
2) $2x^2-4y^2+4x-16y+1=0$
3) $2x^2-3y^2=0$
4) $3x^2+2y^2+4y=0$
5) $x^2+5x+y^2-4y+3=0$
6) $9x^2+8y^2-15x+8y=-27$

28. ขอบของลำแสงจากดวงไฟหน้ารถยนต์มีรูปร่างเป็นกรวย สมมติแกนของกรวยขนานกับพื้นถนนและถนนเป็นถนนที่เรียบและความชันเป็นศูนย์ ขอบของแสงไฟที่ฉายบนพื้นถนนจะเป็นรูปอะไร

29. เส้นทางของน้ำพุทำให้เกิดพาราโบลา จงเขียนสมการอธิบายเส้นทางของน้ำดังรูป

30. ยานอวกาศโคจรรอบโลกที่ระดับความสูง 150 กิโลเมตรจากพื้นโลก เมื่อยานอวกาศมีความเร็วที่เหมาะสมจะสามารถหลุดออกจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้ โดยจะโคจรในแนวเส้นโค้งพาราโบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางของโลกอยู่ที่โฟกัสของพาราโบลา สมมติยานอวกาศมีความเร็วที่เหมาะสม ณ ตำแหน่งเหนือขั้วโลกเหนือ จงเขียนสมการจำลองเส้นโค้งพาราโบลาซึ่งเป็นเส้นทางของยานอวกาศ เมื่อเขียนแทนโลกด้วยวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของแกนพิกัด และกำหนดให้โลกมีรัศมียาวประมาณ 6,400 กิโลเมตร



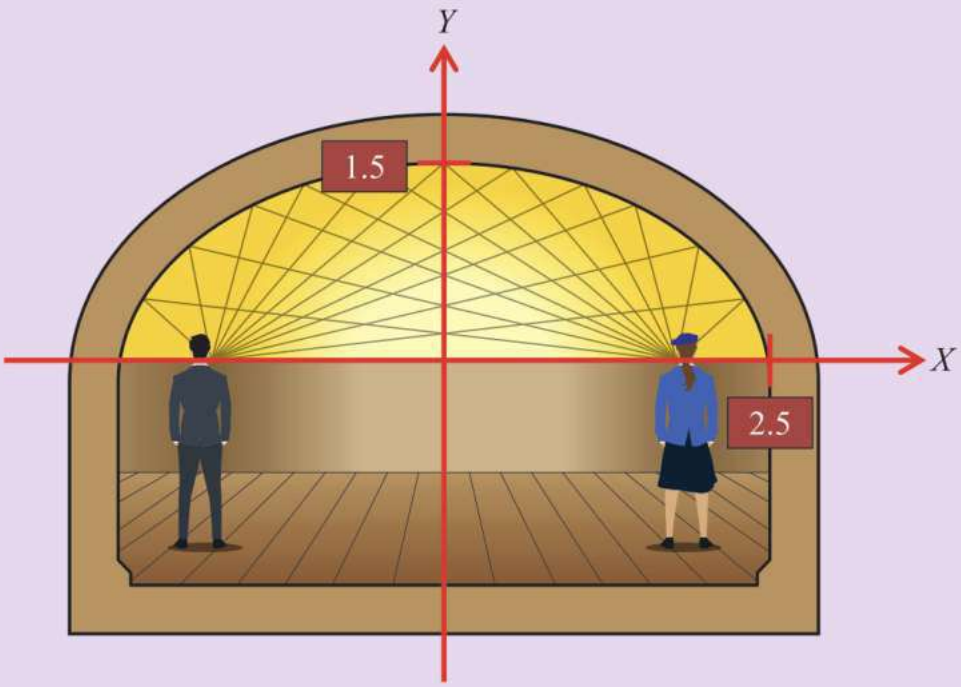
31. ห้องเสียงกระซิบเป็นห้องที่มีโครงสร้างด้านบนเป็นรูปครึ่งทรงรี และมีสมบัติว่าคนที่ยืน ณ โฟกัสหนึ่งจะได้ยินเสียงกระซิบจากคนที่ยืน ณ อีกโฟกัสหนึ่งเสมอ เนื่องจากคลื่นเสียงจากโฟกัสหนึ่งจะสะท้อนกับผนังของห้องรูปวงรีไปยังอีกโฟกัสหนึ่ง ถ้าห้องเสียงกระซิบมีขนาดดังรูป

1) โฟกัสทั้งสองอยู่ห่างกันกี่เมตร

2) จงหาความสูงจากโฟกัสไปยังเพดาน

เสริมสมอง : ห้องเสียงกระซิบ

ห้องเสียงกระซิบ (whispering gallery) เป็นห้องซึ่งสามารถสะท้อนเสียงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งของห้องได้ โดยออกแบบให้มีลักษณะเป็นรูปวงรี จากสมบัติการสะท้อนของวงรี หากผู้พูดยืนอยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่ง คลื่นเสียงจะสะท้อนไปยังโฟกัสซึ่งอยู่อีกจุดหนึ่งของห้อง ทำให้ผู้ที่อยู่บริเวณนั้นได้ยินเสียงของผู้พูด แม้ผู้พูดจะพูดด้วยเสียงกระซิบ



หมายเหตุ ระยะ 1 หน่วยในกราฟ แทนระยะ 1 เมตร

32. ยานอวกาศโคจรผ่านดาวเคราะห์ในแนวเส้นโค้งไฮเพอร์โบลา โดยไปถึงจุดยอดของวงโคจร ณ ตำแหน่ง $(0, 5)$ หลังจากนั้นจึงเข้าใกล้เส้น $y = \frac{5}{2}x$ มากขึ้นเรื่อย ๆ จงเขียนสมการอธิบายวงโคจรของยานอวกาศ เมื่อจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่จุดกำเนิด

33. บ้านของป่านและเพื่อนอีกสองคนตั้งอยู่บนถนนที่วางตัวในแนวตะวันออกและตะวันตก บ้านของเพื่อนทั้งสองมีระยะห่างกัน 6.4 กิโลเมตร และบ้านของป่านอยู่กึ่งกลางระหว่างบ้านของเพื่อนทั้งสองคนพอดี ในขณะที่ทั้งสามคนกำลังโทรศัพท์ประชุมสามสาย ป่านได้ยินเสียงหม้อแปลงไฟฟ้าระเบิด หลังจากนั้น 6 วินาที เพื่อนที่มีบ้านอยู่ทางตะวันออกได้ยินเสียงระเบิด ตามด้วยเพื่อนที่มีบ้านอยู่ทางทิศตะวันตกในวินาทีที่ 8 หลังจากที่ป่านได้ยิน จงหาตำแหน่งของหม้อแปลงไฟฟ้าที่เป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อกำหนดให้เสียงมีความเร็วประมาณ 0.35 กิโลเมตรต่อวินาที

บรรณานุกรม

กรมการขนส่งทางบก. (2559, 10 มิถุนายน). *เครื่องหมายจราจรประเภทป้ายเตือน*. สืบค้นเมื่อ 1 สิงหาคม 2559, จาก https://www.dlt.go.th/th/dlt-knowledge/view.php?_did=110

ปฐมาภรณ์ อวชัย. (2558). คณิตศาสตร์กับศพ. นิตยสาร สสวท., 43(193), 24-25.

ไปรษณีย์ไทย. *อัตราค่าบริการไปรษณีย์ไทย*. สืบค้นเมื่อ 1 สิงหาคม 2559, จาก http://www.thailandpost.com/index.php?page=rate_result

พัฒนชัย รวิวรรณ. (2557). วงรีสลายนิ่ว. *นิตยสาร สสวท.*, 42(189), 24-26.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม โลก ดาราศาสตร์ และอวกาศ เล่ม 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์*. กรุงเทพฯ: บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

Ballast, D. K. (2013). *Interior Design Reference Manual: Everything You Need to Know to Pass the NCIDQ Exam* (6th ed). Belmont, CA: Professional Publications, Inc.

Bourne, M. (2010, May 6). *Is the Gateway Arch a Parabola?*. Retrieved March 20, 2016, from https://www.intmath.com/blog/mathematics/is-the-gateway-arch-a-parabola-4306

Burger, E. B., Chard, D. J., Kennedy, P. A., Leinwand, S. J., Renfro, F. L., Roby, T. W. & Waits, B. K. (2011). *Holt McDougal Algebra 2: Teacher's Edition*. Orlando, FL: Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

Cox, T. (2014). *The Sound Book: The Science of the Sonic Wonders of the World.* New York, NY: W. W. Norton & Company, Inc.

Google. *Our Story: From the Garage to the Googleplex*. Retrieved December 15, 2015, from https://www.google.com/intl/en/about/our-story

International Astronomical Union. (2006, August 24). *IAU 2006 General Assembly: Result of the IAU Resolution Votes*. Retrieved June 17, 2017, from https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau0603

Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M. & Donner, K. J. (2007). *Fundamental Astronomy* (5th ed). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Miller, C. D., Heeren, V. E. & Hornsby, J. (2012). *Mathematical Ideas* (12th ed). Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Ministero dei Beni e delle Attività Culturali e del Turismo. *Brochure Colosseo English*. Retrieved August 1, 2017, from http://archeoroma.beniculturali.it/sites/default/files/brochure_colosseo_UK.pdf

Murdock, J., Kamischke, E. & Kamischke, E. (2004). *Discovering Advanced Algebra: An Investigative Approach: Teacher's Edition*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

NRICH. *Sissa's Reward.* Retrieved March 20, 2016, from https://nrich.maths.org/1163

Ondrusek, E., Jurek, K. & Weiss, A. (2010, February 4). *How to Survive a Zombie Attack (understanding exponential growth and decay)*. Retrieved March 20, 2016, from http://a4a.learnport.org/forum/topics/how-to-survive-a-zombie-attack

Plummer, C. C., Carlson, D. H. & Hammersley, L. (2016). *Physical Geology* (15th ed). New York, NY: McGraw-Hill Education.

Proc, J. (2014, October 31). *LORAN-A*. Retrieved March 20, 2016, from http://www.jproc.ca/hyperbolic/loran_a.html

SpaceX. *Thaicom 8 Mission*. Retrieved June 17, 2017, from http://www.spacex.com/sites/spacex/files/spacex_thaicom_8_press_kit.pdf

Spence, W., Sipkin, S. A. & Choy, G. L. (1989). Measuring the Size of an Earthquake. *Earthquakes and Volcanoes*, 21(1), 58-63.

U.S. Navy. (2016). *U.S. Navy Diving Manual, 7th revision*. Washington, DC: Naval Sea Systems Command.

Williams, D. R. (2017, June 7). *Planetary Fact Sheet - Metric*. Retrieved June 17, 2017, from https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet

Zordak, S. E. *Walk the Plank*. Retrieved March 20, 2016, from http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=2347

ที่มาของภาพ

หน้า 95 National Oceanic and Atmospheric Administration/Public Domain

หน้า 193 กรมอุตุนิยมวิทยา

หน้า 196 NASA/Public Domain

หน้า 197 André Hatala/Wikimedia Commons/Public Domain

หน้า 216 ประกาศคณะกรรมการจัดระบบการจราจรทางบกเรื่อง มาตรฐานเครื่องหมายจราจร ณ วันที่ 16 มิถุนายน พ.ศ. 2546

หน้า 260 บริษัท ไทยคม จำกัด (มหาชน)

หน้า 267 © *Italy-0652 - Colosseum - Intro* by Dennis Jarvis/Flickr/CC BY-SA 2.0

หน้า 281 © *Four solaire odeillo* by user:YvesC~commonswiki/Wikimedia Commons/ CC BY-SA 2.5

หน้า 286 Ingimage

หน้า 291 Ingimage

หน้า 292 © *Nuclear Power Plant Cattenom* by Stefan Kühn/Wikimedia Commons/ CC BY-SA 3.0/GFDL

กราฟทั้งหมดในหนังสือเรียนเล่มนี้สร้างด้วยโปรแกรม GeoGebra

ภาคผนวก

ดัชนี

บทที่ 1 หน้า

ความสัมพันธ์	relation	4
โดเมน	domain	8
เรนจ์	range	8
ฟังก์ชัน	function	16
ฟังก์ชันจาก A ไป B	function from A into B	21
ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B	function from A onto B	21
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง	one-to-one function	23
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B	one-to-one function from A onto B, one-to-one correspondence	24
ฟังก์ชันเพิ่ม	increasing function	33
ฟังก์ชันลด	decreasing function	33
ฟังก์ชันเชิงเส้น	linear function	39
ฟังก์ชันคงตัว	constant function	39
ฟังก์ชันกำลังสอง	quadratic function	44
ฟังก์ชันพหุนาม	polynomial function	49
ฟังก์ชันขั้นบันได	step function	59
ผลบวก	sum	68
ผลต่าง	difference	68
ผลคูณ	product	68
ผลหาร	quotient	68
ฟังก์ชันประกอบ	composite function	72

ฟังก์ชันผกผัน	inverse function	80
ฟังก์ชันเอกลักษณ์	identity function	95

บทที่ 2

		หน้า
เครื่องหมายกรณฑ์	radical sign	105
อันดับที่หรือดัชนี	index	109
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	exponential function	133
สมการเอกซ์โพเนนเชียล	exponential equation	139
อสมการเอกซ์โพเนนเชียล	exponential inequality	139
ฟังก์ชันลอการิทึม	logarithmic function	149
ลอการิทึมสามัญ	common logarithm	159
แอนติลอการิทึม	antilogarithm	160
ลอการิทึมแบบเนเปียร์	Napierian logarithm	163
ลอการิทึมธรรมชาติ	natural logarithm	163
สมการลอการิทึม	logarithmic equation	166
อสมการลอการิทึม	logarithmic inequality	166

บทที่ 3

		หน้า
ระยะตัดแกน X	x-intercept	234
ระยะตัดแกน Y	y-intercept	234
ภาคตัดกรวย	conic sections	248
กรวยกลมตรง	right circular cone	248
แกน	axis	249
จุดยอด	vertex	249
ตัวก่อกำเนิด	generator	249
ข้าง (ของกรวย)	nappe	249

วงกลม	circle	250
วงรี	ellipse	250
พาราโบลา	parabola	250
ไฮเพอร์โบลา	hyperbola	250
ภาคตัดกรวยลดรูป	degenerate conics	250
จุดศูนย์กลาง	center	251
รัศมี	radius	251
วงกลมหนึ่งหน่วย	unit circle	254
โฟกัส	focus	262
แกนเอก	major axis	265
แกนโท	minor axis	265
ความเยื้องศูนย์กลาง	eccentricity	270
เส้นบังคับหรือไดเรกตริกซ์	directrix	276
แกนสมมาตร	axis of symmetry	277
เลตัสเรกตัม	latus rectum	284
คอร์ด	chord	284
กิ่ง	branch	294
แกนตามขวาง	transverse axis	294
แกนสังยุค	conjugate axis	294
เส้นกำกับ	asymptote	296
รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากศูนย์กลาง	central rectangle	297
ไฮเพอร์โบลามุมฉาก	rectangular hyperbola	302
ไฮเพอร์โบลาลดรูป	degenerate hyperbola	319

บัญชีสัญลักษณ์

บทที่ 1

$A \times B$	ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B
D_r	โดเมนของความสัมพันธ์ r
R_r	เรนจ์ของความสัมพันธ์ r
r^{-1}	ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r
$f(x)$	ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x
$f : A \to B$	f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
$f : A \xrightarrow[\text{onto}]{} B$	f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
$f : A \xrightarrow{1\text{–}1} B$	f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B
$f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{–}1} B$	f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B
$f + g$	ผลบวกของ f และ g
$f - g$	ผลต่างของ f และ g
fg	ผลคูณของ f และ g
$\frac{f}{g}$	ผลหารของ f และ g
$g \circ f$	ฟังก์ชันประกอบของ f และ g
f^{-1}	ฟังก์ชันผกผันของ f

บทที่ 2

$\sqrt{x}$	รากที่สองที่ไม่เป็นจำนวนลบของ x
$\sqrt[n]{x}$	ค่าหลักของรากที่ n ของ x
$\log_a x$	ลอการิทึมของ x ฐาน a
$\log x$	ลอการิทึมของ x ฐานสิบ
$\ln x$	ลอการิทึมของ x ฐาน e

บทที่ 3

$P_1P_2, \lvert\overline{P_1P_2}\rvert$	ระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2

คณะผู้จัดทำ

คณะที่ปรึกษา

ดร.พรพรรณ ไวทยางกูร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สัญญา มิตรเอม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำหนังสือเรียน

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฎ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.เป็นหญิง โรจนกุล	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ผศ. ดร.ภาคภูมิ เพ็ชรประดับ	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ผศ. ดร.สายัญ ปัญมา	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

คณะผู้พิจารณาหนังสือเรียน

รศ. ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

คณะบรรณาธิการ

รศ. ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.อมร วาสนาวิจิตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ

นายยูซุฟ เจะบ่าว	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่
ดร.อติชาต เกตตะพันธุ์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
สาขาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สาขาวิทยาศาสตร์ภาคบังคับ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ออกแบบปก

บริษัท พิงค์ บลู แบล็ค แอนด์ ออเร้จน์ จำกัด

ออกแบบรูปเล่ม

บริษัท เพอลังอิ พับลิชชิ่ง (ประเทศไทย) จำกัด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ